

\$SPAD/input schaum5.input

Timothy Daly

June 15, 2008

## Contents

1	[1]:14.120	$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$	3
2	[1]:14.121	$\int \frac{x dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$	8
3	[1]:14.122	$\int \sqrt{(ax+b)(px+q)} dx$	14
4	[1]:14.123	$\int \sqrt{\frac{px+q}{ax+b}} dx$	34
5	[1]:14.124	$\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{(ax+b)(px+q)}} dx$	42



```

--S 2
aa1:=aa.1
--R
--R (2)
--R log
--R
--R      +-----+
--R      +----+ +----+ | 2
--R      (2\|a p \|b q - 2a p x)\|a p x + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      +----+ 2 +----+
--R      2a p x\|b q + (- 2a p x + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R      /
--R      +-----+
--R      +----+ | 2
--R      2\|b q \|a p x + (a q + b p)x + b q + (- a q - b p)x - 2b q
--R      /
--R      +----+
--R      \|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 3
aa2:=aa.2
--R
--R      +-----+
--R      +----+ | 2 +----+ +----+
--R      \|- a p \|a p x + (a q + b p)x + b q - \|- a p \|b q
--R      2atan(-----)
--R      a p x
--R (3) -----
--R      +----+
--R      \|- a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 4
bb1:=2/sqrt(a*p)*log(sqrt(a*(p*x+q))+sqrt(p*(a*x+b)))
--R
--R      +-----+ +-----+
--R      2log(\|a p x + a q + \|a p x + b p )
--R (4) -----
--R      +----+
--R      \|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 5
bb2:=2/sqrt(-a*p)*atan(sqrt((-p*(a*x+b))/(a*(p*x+q))))
--R
--R
--R          +-----+
--R          |- a p x - b p
--R      2atan( |----- )
--R          \| a p x + a q
--R (5) -----
--R          +-----+
--R          \|- a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 6
cc1:=aa1-bb1
--R
--R (6)
--R          +-----+ +-----+
--R      - 2log(\| a p x + a q + \| a p x + b p )
--R +
--R log
--R
--R          +-----+
--R          +---+ +---+ | 2
--R      (2\| a p \| b q - 2a p x)\| a p x + (a q + b p)x + b q
--R +
--R          +---+ 2 +---+
--R      2a p x\| b q + (- 2a p x + (- a q - b p)x - 2b q)\| a p
--R /
--R          +-----+
--R          +---+ | 2
--R      2\| b q \| a p x + (a q + b p)x + b q + (- a q - b p)x - 2b q
--R /
--R          +---+
--R      \| a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 7
cc2:=aa1-bb2
--R
--R (7)
--R          +-----+
--R          \|- a p
--R *
--R      log
--R
--R          +-----+

```

```

--R          +-----+ +-----+          |      2
--R          (2\|a p \|b q  - 2a p x)\|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R          +
--R          +-----+          2          +-----+
--R          2a p x\|b q  + (- 2a p x  + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R          /
--R          +-----+
--R          +-----+ |      2
--R          2\|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q  + (- a q - b p)x - 2b q
--R          +
--R          +-----+
--R          +-----+ | - a p x - b p
--R          - 2\|a p atan( |----- )
--R          \| a p x + a q
--R          /
--R          +-----+ +-----+
--R          \|- a p \|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 8
cc3:=aa2-bb1
--R
--R (8)
--R          +-----+          +-----+          +-----+
--R          - 2\|- a p log(\|a p x + a q  + \|a p x + b p )
--R          +
--R          +-----+
--R          +-----+ |      2          +-----+ +-----+
--R          +-----+ \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q  - \|- a p \|b q
--R          2\|a p atan(-----)
--R                                          a p x
--R          /
--R          +-----+ +-----+
--R          \|- a p \|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 9 14:120 Axiom cannot simplify these answers  
cc4:=aa2-bb2

```

--R
--R (9)
--R          +-----+
--R          +-----+ |      2          +-----+ +-----+
--R          \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q  - \|- a p \|b q
--R          2atan(-----)
--R

```





```

--R      2      2      +----+
--R      ((- 2a p q - 2a b p )x - 4a b p q)\|a p
--R      ,
--R      +-----+
--R      +----+ | 2
--R      (- 2a q - 2b p)\|b q \|a p x + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      2 2      2 2      2 2
--R      (a q + 2a b p q + b p )x + 2a b q + 2b p q
--R      *
--R      +-----+
--R      +-----+ | 2      +-----+ +----+
--R      \|- a p \|a p x + (a q + b p)x + b q - \|- a p \|b q
--R      atan(-----)
--R      a p x
--R      +
--R      +-----+
--R      +-----+ | 2
--R      (- a q - b p)x\|- a p \|a p x + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      2      +-----+ +----+
--R      (2a p x + (a q + b p)x)\|- a p \|b q
--R      /
--R      +-----+
--R      +-----+ +----+ | 2
--R      2a p\|- a p \|b q \|a p x + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      2      2      +-----+
--R      ((- a p q - a b p )x - 2a b p q)\|- a p
--R      ]
--R
--R      Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 11
bb1:=integrate(1/(sqrt(a*x+b)*(p*x+q)),x)

```

```

--R      (2)
--R      +-----+
--R      2 +-----+ | 2
--R      (2a p q - 2b p )\|a x + b + (a p x - a q + 2b p)\|- a p q + b p
--R      log(-----)
--R      p x + q
--R      [-----,
--R      +-----+
--R      | 2

```



```

--R      (2\|a p x  + (a q + b p)x + b q  - a q - b p)atan(-----)
--R                                                                 a q - b p
--R -----
--R                               +-----+
--R                               |          2
--R                               a p\|a p q - b p
--R      ]
--R
--R                                          Type: Vector Expression Integer
--E

```

--S 14 14:121 Axiom cannot simplify this answer

cc:=aa-bb

```

--R
--R      (5)
--R      [
--R
--R                               +----+ +----+
--R      ((2a q + 2b p)\|a p \|b q  + ((2a q + 2b p)x + 4b q)\|a p )
--R      *
--R      +-----+
--R      |          2
--R      \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      2
--R      (- 4a p x  + (- 4a q - 4b p)x - 4b q)\|a p \|b q
--R      +
--R      2 2
--R      ((- a q  - 2a b p q - b p )x - 2a b q  - 2b p q)\|a p
--R      *
--R
--R      2 +-----+
--R      (2a p q - 2b p )\|a x + b  + (a p x - a q + 2b p)\|- a p q + b p
--R      log(-----)
--R                                     p x + q
--R      +
--R      +-----+ +-----+
--R      |          2 +----+ |          2
--R      (2a q + 2b p)\|- a p q + b p  \|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      2 2
--R      ((- a q  - 2a b p q - b p )x - 2a b q  - 2b p q)\|- a p q + b p
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      +----+ +----+ |          2
--R      (2\|a p \|b q  + 2a p x)\|a p x  + (a q + b p)x + b q

```

$$\begin{aligned}
& + \frac{-2apx\sqrt{bq} + (-2ap^2x^2 + (-aq - bp)x - 2bq)\sqrt{ap}}{2\sqrt{bq}\sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} + (-aq - bp)x - 2bq} \\
& + \frac{(-2aq - 2bp)x\sqrt{-apq + bp}\sqrt{ap}\sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq}}{(4ap^2x^2 + (2aq + 2bp)x)\sqrt{-apq + bp}\sqrt{ap}\sqrt{bq}} \\
& / \frac{4a^2p\sqrt{-apq + bp}\sqrt{ap}\sqrt{bq}\sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq}}{((-2apq - 2abp^2)x - 4abpq)\sqrt{-apq + bp}\sqrt{ap}} \\
& , \\
& \frac{(-2aq - 2bp)\sqrt{bq}\sqrt{apq - bp}\sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq}}{((aq^2 + 2abpq + b^2p^2)x + 2abq^2 + 2bpq)\sqrt{apq - bp}} \\
& * \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{-ap}\sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} - \sqrt{-ap}\sqrt{bq}}{apx}\right) \\
& + \frac{((2aq + 2bp)\sqrt{-ap}\sqrt{bq} + ((2aq + 2bp)x + 4bq)\sqrt{-ap})}{\sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq}}
\end{aligned}$$

```

--R
--R      2                +-----+ +-----+
--R      (- 4a p x  + (- 4a q - 4b p)x - 4b q)\|- a p \|b q
--R      +
--R      2 2                2 2                2 2                +-----+
--R      ((- a q  - 2a b p q - b p )x - 2a b q  - 2b p q)\|- a p
--R      *
--R      +-----+
--R      |                2 +-----+
--R      \|a p q - b p \|a x + b
--R      atan(-----)
--R      a q - b p
--R      +
--R      +-----+ +-----+ +-----+
--R      +-----+ |                2 |                2
--R      (- a q - b p)x\|- a p \|a p q - b p \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      2                +-----+ +-----+ |                2
--R      (2a p x  + (a q + b p)x)\|- a p \|b q \|a p q - b p
--R      /
--R      +-----+ +-----+ +-----+ +-----+
--R      +-----+ +-----+ |                2 |                2
--R      2a p\|- a p \|b q \|a p q - b p \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      2                2                +-----+ |                2
--R      ((- a p q - a b p )x - 2a b p q)\|- a p \|a p q - b p
--R      ]
--R
--R      Type: Vector Expression Integer
--E

```

**3 [1]:14.122**  $\int \sqrt{(ax + b)(px + q)} dx$

$$\int \sqrt{(ax + b)(px + q)} = \frac{2apx + bp + aq}{4ap} \sqrt{(ax + b)(px + q)} - \frac{(bp - aq)^2}{8ap} \int \frac{1}{\sqrt{(ax + b)(px + q)}}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 15
aa:=integrate(sqrt((a*x+b)*(p*x+q)),x)
--R
--R
--R (1)
--R [
--R      3 3      2      2      2 2      3 3      2 3      2 2
--R      (4a q - 4a b p q - 4a b p q + 4b p )x + 8a b q - 16a b p q
--R      +
--R      3 2
--R      8b p q
--R      *
--R      +-----+
--R      +---+ |      2
--R      \|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      4 4      3      3      2 2 2 2      3 3      4 4 2
--R      (- a q - 4a b p q + 10a b p q - 4a b p q - b p )x
--R      +
--R      3 4      2 2 3      3 2 2      4 3      2 2 4
--R      (- 8a b q + 8a b p q + 8a b p q - 8b p q)x - 8a b q
--R      +
--R      3 3      4 2 2
--R      16a b p q - 8b p q
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      +---+ +---+ |      2
--R      (2\|a p \|b q + 2a p x)\|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      +---+      2      +---+
--R      - 2a p x\|b q + (- 2a p x  + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R      /
--R      +-----+
--R      +---+ |      2
--R      2\|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q + (- a q - b p)x - 2b q
--R      +

```

$$\begin{aligned}
& (-4a^3 p^2 q - 24a^2 b p^2 q - 4a^2 b^3 p)x \\
& + (-2a^3 q^3 - 46a^2 b p q^2 - 46a b^2 p^2 q - 2b^3 p^3)x \\
& + (-8a^2 b q^3 - 48a b^2 p q^2 - 8b^3 p^3)x \\
& * \sqrt{a p} \sqrt{a p x^2 + (a q + b p)x + b q} \\
& + (16a^3 p^2 q + 16a^2 b p^3 q + 24a^3 p^2 q^2 + 80a^2 b p^2 q^2 + 24a^2 b^3 p^3 q)x \\
& + (6a^3 q^3 + 74a^2 b p q^2 + 74a b^2 p^2 q + 6b^3 p^3)x \\
& + (8a^2 b q^3 + 48a b^2 p q^2 + 8b^3 p^3)x \\
& * \sqrt{a p} \sqrt{b q} \\
& / ((32a^2 p^2 q + 32a^2 b p^2 q)x + 64a^2 b p^2 q) \sqrt{a p} \sqrt{b q} \\
& * \sqrt{a p x^2 + (a q + b p)x + b q} \\
& + (-8a^3 p^2 q - 48a^2 b p^2 q - 8a^2 b^3 p^2)x + (-64a^2 b p^2 q - 64a^2 b^3 p^2 q)x \\
& - 64a^2 b p^2 q \\
& * \sqrt{a p} \\
& , \\
& (-4a^3 q^3 + 4a^2 b p q^2 + 4a^2 b^3 p^2 q - 4b^3 p^3)x - 8a^2 b q^3 \\
& + 2^2 2^3 2
\end{aligned}$$

```

--R      16a b p q - 8b p q
--R      *
--R      +-----+
--R      +----+ |      2
--R      \|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      4 4      3      3      2 2 2 2      3 3      4 4 2
--R      (a q  + 4a b p q  - 10a b p q  + 4a b p q  + b p )x
--R      +
--R      3 4      2 2 3      3 2 2      4 3      2 2 4      3 3
--R      (8a b q  - 8a b p q  - 8a b p q  + 8b p q)x + 8a b q  - 16a b p q
--R      +
--R      4 2 2
--R      8b p q
--R      *
--R      +-----+
--R      +-----+ |      2      +-----+ +----+
--R      \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q  - \|- a p \|b q
--R      atan(-----)
--R      a p x
--R      +
--R      3 2      2 2      2 3 3
--R      (- 2a p q  - 12a b p q  - 2a b p )x
--R      +
--R      3 3      2 2      2 2      3 3 2
--R      (- a q  - 23a b p q  - 23a b p q  - b p )x
--R      +
--R      2 3      2 2      3 2
--R      (- 4a b q  - 24a b p q  - 4b p q)x
--R      *
--R      +-----+
--R      +-----+ |      2
--R      \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      3 2      2 3 4      3 2      2 2      2 3 3
--R      (8a p q + 8a b p )x  + (12a p q  + 40a b p q + 12a b p )x
--R      +
--R      3 3      2 2      2 2      3 3 2
--R      (3a q  + 37a b p q  + 37a b p q + 3b p )x
--R      +
--R      2 3      2 2      3 2
--R      (4a b q  + 24a b p q  + 4b p q)x
--R      *
--R      +-----+ +----+
--R      \|- a p \|b q
--R      /

```

```

--R          2          2          +-----+ +-----+
--R      ((16a p q + 16a b p )x + 32a b p q)\|- a p \|b q
--R      *
--R          +-----+
--R          |      2
--R      \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R          3  2      2  2      2 3  2      2  2      2  2
--R      (- 4a p q - 24a b p q - 4a b p )x  + (- 32a b p q - 32a b p q)x
--R      +
--R          2  2
--R      - 32a b p q
--R      *
--R          +-----+
--R          \|- a p
--R      ]
--R
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

Since there are two parts to the aa variable we split them:

```

(*)+≡
--S 16
aa1:=aa.1
--R
--R (2)
--R      3 3      2      2      2 2      3 3      2 3      2 2
--R      (4a q - 4a b p q - 4a b p q + 4b p )x + 8a b q - 16a b p q
--R      +
--R      3 2
--R      8b p q
--R      *
--R      +-----+
--R      +---+ |      2
--R      \|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      4 4      3      3      2 2 2 2      3 3      4 4 2
--R      (- a q - 4a b p q + 10a b p q - 4a b p q - b p )x
--R      +
--R      3 4      2 2 3      3 2 2      4 3      2 2 4      3 3
--R      (- 8a b q + 8a b p q + 8a b p q - 8b p q)x - 8a b q + 16a b p q
--R      +
--R      4 2 2
--R      - 8b p q
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      +---+ +---+ |      2
--R      (2\|a p \|b q + 2a p x)\|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      +---+ |      2
--R      - 2a p x\|b q + (- 2a p x  + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R      /
--R      +-----+
--R      +---+ |      2
--R      2\|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q + (- a q - b p)x - 2b q
--R      +
--R      3 2      2 2      2 3 3
--R      (- 4a p q - 24a b p q - 4a b p )x
--R      +
--R      3 3      2 2      2 2      3 3 2
--R      (- 2a q - 46a b p q - 46a b p q - 2b p )x
--R      +
--R      2 3      2 2      3 2
--R      (- 8a b q - 48a b p q - 8b p q)x

```

```

--R      *
--R      +-----+
--R      +----+ |      2
--R      \|a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      3 2      2 3 4      3 2      2 2      2 3 3
--R      (16a p q + 16a b p )x  + (24a p q  + 80a b p q + 24a b p )x
--R      +
--R      3 3      2 2      2 2      3 3 2
--R      (6a q  + 74a b p q  + 74a b p q + 6b p )x
--R      +
--R      2 3      2 2      3 2
--R      (8a b q  + 48a b p q  + 8b p q)x
--R      *
--R      +----+ +----+
--R      \|a p \|b q
--R      /
--R      2      2      +----+ +----+
--R      ((32a p q + 32a b p )x + 64a b p q)\|a p \|b q
--R      *
--R      +-----+
--R      |      2
--R      \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      3 2      2 2      2 3 2      2 2      2 2
--R      (- 8a p q - 48a b p q - 8a b p )x  + (- 64a b p q - 64a b p q)x
--R      +
--R      2 2
--R      - 64a b p q
--R      *
--R      +----+
--R      \|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 17
aa2:=aa.2

```

```

--R      (3)
--R      3 3      2 2      2 2      3 3      2 3      2 2
--R      (- 4a q  + 4a b p q  + 4a b p q - 4b p )x - 8a b q  + 16a b p q
--R      +
--R      3 2
--R      - 8b p q
--R      *
--R      +-----+

```

$$\begin{aligned}
& \sqrt{bq} \sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} \\
& + (aq^4 + 4abp^3q - 10a^2b^2p^2q^2 + 4a^3b^3p^3q + b^4p^4)x^2 \\
& + (8a^3b^4q - 8a^2b^3p^2q^3 - 8a^3b^2p^2q^4 + 8b^4p^3q)x^3 + 8a^2b^2q^4 - 16a^3b^3p^3q \\
& + 8b^4p^2q^2 \\
& * \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{-ap} \sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} - \sqrt{-ap} \sqrt{bq}}{apx}\right) \\
& + (-2ap^3q^2 - 12a^2b^2p^2q^3 - 2a^2b^3p^3)x^3 \\
& + (-a^3q^3 - 23a^2b^2p^2q^4 - 23a^2b^3p^3q^2 - b^3p^3)x^2 \\
& + (-4a^2b^3q^3 - 24a^2b^2p^2q^4 - 4b^3p^2q^2)x^3 \\
& * \sqrt{-ap} \sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} \\
& + (8ap^3q^2 + 8a^2b^3p^4)x^3 + (12a^3p^2q^2 + 40a^2b^3p^2q + 12a^2b^3p^3)x^2 \\
& + (3a^3q^3 + 37a^2b^2p^2q^4 + 37a^2b^3p^3q^2 + 3b^3p^3)x^3 \\
& + (4a^2b^3q^3 + 24a^2b^2p^2q^4 + 4b^3p^2q^2)x^3 \\
& * \sqrt{-ap} \sqrt{bq} \\
& / ((16ap^2q + 16a^2b^2p^2)x + 32a^2b^3p^2q) \sqrt{-ap} \sqrt{bq} \\
& *
\end{aligned}$$





```

--R      +-----+ |      2      +-----+ +-----+
--R      \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q  - \|- a p \|b q
--R      2atan(-----)
--R      a p x
--R      -----]
--R      +-----+
--R      \|- a p
--R      Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

Since the integral has two parts, we break them apart

```

(*)+≡
--S 21
bbc1:=bbc.1
--R
--R      (7)
--R      log
--R      +-----+
--R      +----+ +----+ |      2
--R      (2\|a p \|b q  - 2a p x)\|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      +----+      2      +----+
--R      2a p x\|b q  + (- 2a p x  + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R      /
--R      +-----+
--R      +----+ |      2
--R      2\|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q  + (- a q - b p)x - 2b q
--R      /
--R      +----+
--R      \|a p
--R      Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 22
bbc2:=bbc.2
--R
--R      +-----+
--R      +-----+ |      2      +-----+ +-----+
--R      \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q  - \|- a p \|b q
--R      2atan(-----)
--R      a p x
--R      (8) -----
--R      +-----+
--R      \|- a p
--R      Type: Expression Integer
--E

```

And now we construct the two bb answers based on the integral parts

```

(*)+≡
--S 23
bb1:=bba+bbb*bbc1
--R
--R (9)
--R      2 2      2 2
--R      (- a q  + 2a b p q - b p )
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      +---+ +---+ | 2
--R      (2\|a p \|b q  - 2a p x)\|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      +---+      2      +---+
--R      2a p x\|b q  + (- 2a p x  + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R      /
--R      +-----+
--R      +---+ | 2
--R      2\|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q  + (- a q - b p)x - 2b q
--R      +
--R      +-----+
--R      +---+ | 2
--R      (4a p x + 2a q + 2b p)\|a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      /
--R      +---+
--R      8a p\|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 24
bb2:=bba+bbb*bbc2
--R
--R (10)
--R      2 2      2 2
--R      (- a q  + 2a b p q - b p )
--R      *
--R      +-----+
--R      +-----+ | 2      +-----+ +---+
--R      \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q  - \|- a p \|b q
--R      atan(-----)
--R      a p x
--R      +
--R      +-----+
--R      +-----+ | 2

```

```

--R      (2a p x + a q + b p)\|- a p \|a p x + (a q + b p)x + b q
--R /
--R      +-----+
--R      4a p\|- a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

So there are 4 possible combinations that might yield an answer. We construct all four.

```

(*)+≡
--S 25
cc1:=aa1-bb1
--R
--R (11)
--R      3 3      2      2      2 2      3 3      2 3      2 2
--R      (4a q - 4a b p q - 4a b p q + 4b p )x + 8a b q - 16a b p q
--R      +
--R      3 2
--R      8b p q
--R      *
--R      +-----+
--R      +---+ |      2
--R      \|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      4 4      3      3      2 2 2 2      3 3      4 4 2
--R      (- a q - 4a b p q + 10a b p q - 4a b p q - b p )x
--R      +
--R      3 4      2 2 3      3 2 2      4 3      2 2 4      3 3
--R      (- 8a b q + 8a b p q + 8a b p q - 8b p q)x - 8a b q + 16a b p q
--R      +
--R      4 2 2
--R      - 8b p q
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      +---+ +---+ |      2
--R      (2\|a p \|b q + 2a p x)\|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      +---+      2      +---+
--R      - 2a p x\|b q  + (- 2a p x  + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R      /
--R      +-----+
--R      +---+ |      2
--R      2\|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q  + (- a q - b p)x - 2b q
--R      +
--R      3 3      2      2      2 2      3 3      2 3      2 2
--R      (4a q - 4a b p q - 4a b p q + 4b p )x + 8a b q - 16a b p q
--R      +
--R      3 2
--R      8b p q
--R      *
--R      +-----+

```

$$\begin{aligned}
& \sqrt{bq} \sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} \\
& + (-a^4q - 4a^3bpq + 10a^2b^2p^2q - 4a^3b^3p^3q - b^4p^4)x^2 \\
& + (-8a^3bq^4 + 8a^2b^2pq^3 + 8a^3b^2p^2q^2 - 8b^4p^3q)x^3 - 8a^2b^2q^4 + 16a^3b^3p^3q \\
& - 8b^4p^2q^2 \\
& * \log \left( \frac{(2\sqrt{ap}\sqrt{bq} - 2apx)\sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} + 2apx\sqrt{bq} + (-2apx^2 + (-aq - bp)x - 2bq)\sqrt{ap}}{2\sqrt{bq}\sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} + (-aq - bp)x - 2bq} \right) \\
& + ((8a^2bq^3 + 16a^2b^2pq^2 + 8b^3p^2q)x^2 + 16a^2b^3q^3 + 16b^3p^2q^2)\sqrt{ap} \\
& * \sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} \\
& + (-2a^3q^3 - 14a^2b^2pq^2 - 14a^2b^3p^2q - 2b^3p^3)x^2 \\
& + (-16a^2b^3q^3 - 32a^2b^2pq^2 - 16b^3p^3q)x^3 - 16a^2b^3q^3 - 16b^3p^3q \\
& * \sqrt{ap}\sqrt{bq} \\
& / ((32ap^2q + 32a^2bp^2)x^2 + 64ab^2p^2q)\sqrt{ap}\sqrt{bq} \\
& * \sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq}
\end{aligned}$$

```

--R      +
--R      3 2      2 2      2 3 2      2 2      2 2
--R      (- 8a p q - 48a b p q - 8a b p )x + (- 64a b p q - 64a b p q)x
--R      +
--R      2 2
--R      - 64a b p q
--R      *
--R      +----+
--R      \|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 26
cc2:=aa1-bb2

```

```

--R      (12)
--R      3 3      2 2      2 2      3 3      2 3      2 2
--R      (4a q - 4a b p q - 4a b p q + 4b p )x + 8a b q - 16a b p q
--R      +
--R      3 2
--R      8b p q
--R      *
--R      +-----+
--R      +-----+ +----+ | 2
--R      \|- a p \|b q \|a p x + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      4 4      3 3      2 2 2 2      3 3      4 4 2
--R      (- a q - 4a b p q + 10a b p q - 4a b p q - b p )x
--R      +
--R      3 4      2 2 3      3 2 2      4 3      2 2 4
--R      (- 8a b q + 8a b p q + 8a b p q - 8b p q)x - 8a b q
--R      +
--R      3 3      4 2 2
--R      16a b p q - 8b p q
--R      *
--R      +-----+
--R      \|- a p
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      +----+ +----+ | 2
--R      (2\|a p \|b q + 2a p x)\|a p x + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      +----+ 2 +----+
--R      - 2a p x\|b q + (- 2a p x + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R      /

```

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{bq} \sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} + (-aq - bp)x - 2bq \\
& + (8a^3q^3 - 8a^2bpq^2 - 8ab^2p^2q + 8b^3p^3)x + 16a^2bq^3 - 32a^2bpq^2 \\
& + 16b^3p^2q \\
& * \sqrt{ap} \sqrt{bq} \sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} \\
& + (-2a^4q^4 - 8a^3bpq^3 + 20a^2b^2p^2q^2 - 8a^3b^3p^3q - 2b^4p^4)x \\
& + (-16a^3bq^4 + 16a^2b^2p^2q^3 + 16ab^3p^2q^2 - 16b^4p^3q)x - 16a^2b^2q^4 \\
& + 32a^3b^3p^2q^2 - 16b^4p^3q \\
& * \sqrt{ap} \\
& * \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{-ap} \sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} - \sqrt{-ap} \sqrt{bq}}{apx}\right) \\
& + ((8a^2bq^3 + 16a^2bpq^2 + 8b^3p^2q)x + 16a^2bq^3 + 16b^3p^2q) \sqrt{-ap} \sqrt{ap} \\
& * \sqrt{apx^2 + (aq + bp)x + bq} \\
& + (-2a^3q^3 - 14a^2bpq^2 - 14ab^2p^2q - 2b^3p^3)x \\
& + (-16a^2bq^3 - 32a^2bpq^2 - 16b^3p^3)x - 16a^2bq^3 - 16b^3p^3q \\
& * +-----+ +-----+ +-----+
\end{aligned}$$

```

--R      \|- a p \|a p \|b q
--R /
--R      2      2      +-----+ +-----+ +-----+
--R      ((32a p q + 32a b p )x + 64a b p q)\|- a p \|a p \|b q
--R *
--R      +-----+
--R      |      2
--R      \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R +
--R      3 2      2 2      2 3 2      2 2      2 2
--R      (- 8a p q - 48a b p q - 8a b p )x  + (- 64a b p q - 64a b p q)x
--R +
--R      2 2
--R      - 64a b p q
--R *
--R      +-----+ +-----+
--R      \|- a p \|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 27

cc3:=aa1-bb1

```

--R
--R (13)
--R      3 3      2 2      2 2      3 3      2 3      2 2
--R      (4a q - 4a b p q - 4a b p q + 4b p )x + 8a b q - 16a b p q
--R +
--R      3 2
--R      8b p q
--R *
--R      +-----+
--R      +-----+ |      2
--R      \|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R +
--R      4 4      3 3      2 2 2 2      3 3      4 4 2
--R      (- a q - 4a b p q + 10a b p q - 4a b p q - b p )x
--R +
--R      3 4      2 2 3      3 2 2      4 3      2 2 4      3 3
--R      (- 8a b q + 8a b p q + 8a b p q - 8b p q)x - 8a b q + 16a b p q
--R +
--R      4 2 2
--R      - 8b p q
--R *
--R      log
--R      +-----+ +-----+
--R      +-----+ +-----+ |      2

```

$$\begin{aligned}
& \frac{(2\sqrt{ap}\sqrt{bq} + 2apx)\sqrt{apx^2 + (aq+bp)x + bq}}{-2apx\sqrt{bq} + (-2apx^2 + (-aq-bp)x - 2bq)\sqrt{ap}} \\
& / \\
& \frac{2\sqrt{bq}\sqrt{apx^2 + (aq+bp)x + bq} + (-aq-bp)x - 2bq}{(4a^3q^3 - 4a^2bpq^2 - 4ab^2p^2q + 4b^3p^3)x + 8a^2bq^2 - 16ab^2p^2q + 8b^3p^3} \\
& + \\
& \frac{8b^3p^2q}{\sqrt{bq}\sqrt{apx^2 + (aq+bp)x + bq}} \\
& + \\
& \frac{(-a^4q^4 - 4a^3bpq^3 + 10a^2b^2p^2q^2 - 4ab^3p^3q - b^4p^4)x + (-8a^3bq^4 + 8a^2b^2p^2q^3 + 8ab^3p^2q^2 - 8b^4p^3q)x - 8a^2b^2q^4 + 16ab^3p^3q - 8b^4p^2q^2}{\log\left(\frac{(2\sqrt{ap}\sqrt{bq} - 2apx)\sqrt{apx^2 + (aq+bp)x + bq}}{2apx\sqrt{bq} + (-2apx^2 + (-aq-bp)x - 2bq)\sqrt{ap}}\right)} \\
& + \\
& \frac{((8a^2bq^3 + 16ab^2p^2q^2 + 8b^3p^2q)x + 16a^2bq^3 + 16b^3p^2q)\sqrt{ap}}{\sqrt{apx^2 + (aq+bp)x + bq}}
\end{aligned}$$

```

--R      +
--R      3 3      2 2      2 2      3 3 2
--R      (- 2a q - 14a b p q - 14a b p q - 2b p )x
--R      +
--R      2 3      2 2      3 2      2 3      3 2
--R      (- 16a b q - 32a b p q - 16b p q)x - 16a b q - 16b p q
--R      *
--R      +----+ +----+
--R      \|a p \|b q
--R      /
--R      2      2      +----+ +----+
--R      ((32a p q + 32a b p )x + 64a b p q)\|a p \|b q
--R      *
--R      +-----+
--R      |      2
--R      \|a p x + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      3 2      2 2      2 3 2      2 2      2 2
--R      (- 8a p q - 48a b p q - 8a b p )x + (- 64a b p q - 64a b p q)x
--R      +
--R      2 2
--R      - 64a b p q
--R      *
--R      +----+
--R      \|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 28 14:122 Axiom cannot simplify this answer  
cc4:=aa2-bb2

```

--R
--R      (14)
--R      2 3      2 2      3 2      2 3      3 2
--R      ((4a b q + 8a b p q + 4b p q)x + 8a b q + 8b p q )
--R      *
--R      +-----+
--R      |      2
--R      \|a p x + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      3 3      2 2      2 2      3 3 2
--R      (- a q - 7a b p q - 7a b p q - b p )x
--R      +
--R      2 3      2 2      3 2      2 3      3 2
--R      (- 8a b q - 16a b p q - 8b p q)x - 8a b q - 8b p q
--R      *
--R      +----+

```

```

--R      \|b q
--R /
--R
--R      +-----+
--R      2      2      +---+ | 2
--R      ((16a p q + 16a b p )x + 32a b p q)\|b q \|a p x + (a q + b p)x + b q
--R +
--R      3 2      2 2      2 3 2      2 2      2 2
--R      (- 4a p q - 24a b p q - 4a b p )x + (- 32a b p q - 32a b p q)x
--R +
--R      2 2
--R      - 32a b p q
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

4 [1]:14.123  $\int \sqrt{\frac{px+q}{ax+b}} dx$

$$\int \sqrt{\frac{px+q}{ax+b}} = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{a} + \frac{aq-bp}{2a} \int \frac{1}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 29
aa:=integrate(sqrt((p*x+q)/(a*x+b)),x)
--R
--R
--R (1)
--R [
--R      (a q - b p)
--R      *
--R      +-----+
--R      +-----+      2      |p x + q
--R      log((2a p x + a q + b p)\|a p  + (2a p x + 2a b p) |----- )
--R      \|a x + b
--R      +
--R      +-----+
--R      |p x + q +-----+
--R      (2a x + 2b) |----- \|a p
--R      \|a x + b
--R      /
--R      +-----+
--R      2a\|a p
--R      ,
--R      +-----+
--R      +-----+ |p x + q
--R      \|- a p |-----
--R      \|a x + b      +-----+ |p x + q
--R      (a q - b p)atan(-----) + (a x + b)\|- a p |-----
--R      p      \|a x + b
--R      -----]
--R      +-----+
--R      a\|- a p
--R      Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

--S 30
aa1:=aa.1
--R

```



```

--R (5) -----
--R          2a
--R
--R                                          Type: Fraction Polynomial Integer
--E

```

```

--S 34
bbc:=integrate(1/(sqrt((a*x+b)*(p*x+q))),x)

```

```

--R (6)
--R [
--R   log
--R
--R                                     +-----+
--R               +----+ +----+      |      2
--R           (2\|a p \|b q  - 2a p x)\|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R   +
--R               +----+      2      +----+
--R           2a p x\|b q  + (- 2a p x  + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R   /
--R               +-----+
--R           +----+ |      2
--R           2\|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q  + (- a q - b p)x - 2b q
--R /
--R   +----+
--R   \|a p
--R ,
--R               +-----+
--R           +-----+ |      2      +-----+ +----+
--R           \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q  - \|- a p \|b q
--R   2atan(-----)
--R                                     a p x
--R -----]
--R
--R               +-----+
--R               \|- a p
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 35
bbc1:=bbc.1

```

```

--R (7)
--R   log
--R
--R                                     +-----+
--R               +----+ +----+      |      2
--R           (2\|a p \|b q  - 2a p x)\|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R   +
--R               +----+      2      +----+
--R           2a p x\|b q  + (- 2a p x  + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p

```

```

--R      2a p x\|b q + (- 2a p x + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R      /
--R      +-----+
--R      +----+ |      2
--R      2\|b q \|a p x + (a q + b p)x + b q + (- a q - b p)x - 2b q
--R      /
--R      +----+
--R      \|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 36
bbc2:=bbc.2

```

```

--R
--R      +-----+
--R      +----+ |      2
--R      \|- a p \|a p x + (a q + b p)x + b q - \|- a p \|b q
--R      2atan(-----)
--R      a p x
--R      (8) -----
--R      +----+
--R      \|- a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 37
bb1:=bba+bbb*bbc1

```

```

--R
--R      (9)
--R      (a q - b p)
--R      *
--R      log
--R      +-----+
--R      +----+ +----+ |      2
--R      (2\|a p \|b q - 2a p x)\|a p x + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      +----+      2
--R      2a p x\|b q + (- 2a p x + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R      /
--R      +-----+
--R      +----+ |      2
--R      2\|b q \|a p x + (a q + b p)x + b q + (- a q - b p)x - 2b q
--R      +
--R      +-----+
--R      +----+ |      2
--R      2\|a p \|a p x + (a q + b p)x + b q

```

```

--R /
--R      +----+
--R      2a\|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 38
bb2:=bba+bbb*bbc2

```

```

--R
--R (10)
--R
--R      +-----+
--R      +-----+ |      2
--R      \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q  - \|- a p \|b q
--R      (a q - b p)atan(-----)
--R                                  a p x
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      +-----+ |      2
--R      \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R
--R      /
--R      +-----+
--R      a\|- a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 39
cc1:=aa1-bb1

```

```

--R
--R (11)
--R
--R      +-----+
--R      +-----+      2
--R      (a q - b p)log((2a p x + a q + b p)\|a p  + (2a p x + 2a b p) |----- )
--R                                  \|a x + b
--R
--R      +
--R      (- a q + b p)
--R
--R      *
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      +-----+ +-----+
--R      (2\|a p \|b q  - 2a p x)\|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R
--R      +
--R      +-----+      2
--R      2a p x\|b q  + (- 2a p x  + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R
--R      /
--R      +-----+
--R      +-----+ |      2

```

```

--R          2\|b q \|a p x  + (a q + b p)x + b q  + (- a q - b p)x - 2b q
--R  +
--R          +-----+
--R          +---+ |      2
--R          - 2\|a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q  + (2a x + 2b) |----- \|a p
--R          \|a x + b
--R  /
--R          +---+
--R          2a\|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 40
cc2:=aa1-bb2

```

```

--R
--R  (12)
--R          +-----+
--R          (a q - b p)\|- a p
--R  *
--R          +-----+
--R          +---+      2
--R          log((2a p x + a q + b p)\|a p  + (2a p x + 2a b p) |----- )
--R          \|a x + b
--R  +
--R          +---+
--R          (- 2a q + 2b p)\|a p
--R  *
--R          +-----+
--R          +-----+ |      2
--R          \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q  - \|- a p \|b q
--R          atan(-----)
--R          a p x
--R  +
--R          +-----+
--R          +-----+ +---+ |      2
--R          - 2\|- a p \|a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R  +
--R          +-----+
--R          +-----+ |p x + q  +---+
--R          (2a x + 2b)\|- a p |----- \|a p
--R          \|a x + b
--R  /
--R          +-----+ +---+
--R          2a\|- a p \|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 41
cc3:=aa2-bb1
--R
--R (13)
--R          +-----+
--R      (- a q + b p)\|- a p
--R      *
--R      log
--R
--R          +-----+
--R          +-----+ +-----+ |      2
--R      (2\|a p \|b q - 2a p x)\|a p x + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R          +-----+          2          +-----+
--R      2a p x\|b q + (- 2a p x + (- a q - b p)x - 2b q)\|a p
--R      /
--R          +-----+
--R          +-----+ |      2
--R      2\|b q \|a p x + (a q + b p)x + b q + (- a q - b p)x - 2b q
--R      +
--R
--R          +-----+
--R          +-----+ |p x + q
--R          \|- a p |-----
--R          +-----+          \|a x + b
--R      (2a q - 2b p)\|a p atan(-----)
--R                                  p
--R      +
--R          +-----+
--R          +-----+ +-----+ |      2
--R      - 2\|- a p \|a p \|a p x + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R          +-----+
--R          +-----+ |p x + q +-----+
--R      (2a x + 2b)\|- a p |----- \|a p
--R          \|a x + b
--R      /
--R          +-----+ +-----+
--R      2a\|- a p \|a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 42      14:123 Axiom cannot simplify these results
cc4:=aa2-bb2
--R
--R (14)
--R      (- a q + b p)

```

```

--R      *
--R      +-----+
--R      +-----+ |      2      +-----+ +-----+
--R      \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q  - \|- a p \|b q
--R      atan(-----)
--R      a p x
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      +-----+ |p x + q
--R      \|- a p |-----
--R      \|a x + b
--R      (a q - b p)atan(-----)
--R      p
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      +-----+ |      2      +-----+ |p x + q
--R      - \|- a p \|a p x  + (a q + b p)x + b q  + (a x + b)\|- a p |-----
--R      \|a x + b
--R
--R      /
--R      +-----+
--R      a\|- a p
--R
--R
--R      Type: Expression Integer
--E

```

5 [1]:14.124  $\int \frac{dx}{(px + q)\sqrt{(ax + b)(px + q)}} dx$

$$\int \frac{1}{(px + q)\sqrt{(ax + b)(px + q)}} = \frac{2\sqrt{ax + b}}{(aq - bp)\sqrt{px + q}}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 43
aa:=integrate(1/((p*x+q)*sqrt((a*x+b)*(p*x+q))),x)
--R
--R
--R
--R              2x
--R (1)  -----
--R      +-----+
--R      |      2
--R      q\|a p x  + (a q + b p)x + b q  + (- p x - q)\|b q
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 44
bb:=(2*sqrt(a*x+b))/((a*q-b*p)*sqrt(p*x+q))
--R
--R
--R      +-----+
--R      2\|a x + b
--R (2)  -----
--R      +-----+
--R      (a q - b p)\|p x + q
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 45      14:124 Axiom cannot simplify this result
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)
--R      +-----+
--R      +-----+ |      2
--R      - 2q\|a x + b \|a p x  + (a q + b p)x + b q  + (2a q - 2b p)x\|p x + q
--R      +
--R      +-----+ +-----+
--R      (2p x + 2q)\|b q \|a x + b
--R      /
--R      +-----+
--R      2      +-----+ |      2

```

```

--R      (a q  - b p q)\|p x + q \|a p x  + (a q + b p)x + b q
--R      +
--R      2      2      +----+ +-----+
--R      ((- a p q + b p )x - a q  + b p q)\|b q \|p x + q
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

)spool
)lisp (bye)

```

## References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*  
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp63-64