# $SPAD/input schaum3.input

Timothy Daly

June 15, 2008

# Contents


**1** **[1]:14.105** $\int \frac{dx}{(ax+b)(px+q)}$ **3**

**2** **[1]:14.106** $\int \frac{x\ dx}{(ax+b)(px+q)}$ **5**

**3** **[1]:14.107** $\int \frac{dx}{(ax+b)^2(px+q)}$ **6**

**4** **[1]:14.108** $\int \frac{x\ dx}{(ax+b)^2(px+q)}$ **8**

**5** **[1]:14.109** $\int \frac{x^2\ dx}{(ax+b)^2(px+q)}$ **10**

**6** **[1]:14.110** $\int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^n}$ **11**

**7** **[1]:14.111** $\int \frac{ax+b}{px+q}\ dx$ **12**

**8** **[1]:14.112** $\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n}\ dx$ **13**

## 1 [1]:14.105 $\int \frac{dx}{(ax+b)(px+q)}$

$$\int \frac{1}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{bp-aq} \ln\left(\frac{px+q}{ax+b}\right)$$

⟨*⟩≡

```
)spool schaum3.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(1/((a*x+b)*(p*x+q)),x)
--R
--R
--R        - log(p x + q) + log(a x + b)
--R   (1)  ----------------------------
--R                 a q - b p
--R                                        Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=1/(b*p-a*q)*log((p*x+q)/(a*x+b))
--R
--R
--R             p x + q
--R          log(-------)
--R             a x + b
--R   (2)  - ------------
--R           a q - b p
--R                                              Type: Expression Integer
--E

--S 3
cc:=aa-bb
--R
--R
--R                                          p x + q
--R        - log(p x + q) + log(a x + b) + log(-------)
--R                                          a x + b
--R   (3)  ----------------------------------------------
--R                          a q - b p
--R                                              Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 4
logdiv:=rule(log(a)-log(b) == log(a/b))
--R
--R                                        a
--I   (4)  - log(b) + log(a) + %I == log(-) + %I
--R                                        b
--R                         Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 5
dd:=logdiv cc
--R
--R                                1
--R        log(a x + b) + log(-------)
--R                            a x + b
--R   (5)  ---------------------------
--R                a q - b p
--R                                                        Type: Expression Integer
--E

--S 6
logmul:=rule(log(a)+log(b) == log(a*b))
--R
--I   (6)  log(b) + log(a) + %J == log(a b) + %J
--R                         Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 7      14:105 Schaums and Axiom agree
ee:=logmul dd
--R
--R   (7)  0
--R                                                        Type: Expression Integer
--E
```

## 2 [1]:14.106 $\int \frac{x\ dx}{(ax+b)(px+q)}$

$$\int \frac{x}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\left\{\frac{b}{a}\ \ln(ax+b) - \frac{q}{p}\ \ln(px+q)\right\}$$

⟨*⟩+≡

```
)clear all

--S 8
aa:=integrate(x/((a*x+b)*(p*x+q)),x)
--R
--R
--R        a q log(p x + q) - b p log(a x + b)
--R   (1)  ----------------------------------
--R                    2           2
--R                   a p q - a b p
--R                                        Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 9
bb:=1/(b*p-a*q)*(b/a*log(a*x+b)-q/p*log(p*x+q))
--R
--R
--R        a q log(p x + q) - b p log(a x + b)
--R   (2)  ----------------------------------
--R                    2           2
--R                   a p q - a b p
--R                                              Type: Expression Integer
--E

--S 10     14:106 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R
--R   (3)  0
--R                                              Type: Expression Integer
--E
```

## 3 [1]:14.107 $\int \frac{dx}{(ax+b)^2(px+q)}$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\left\{\frac{1}{ax+b} + \frac{p}{bp-aq}\ \ln\left(\frac{px+q}{ax+b}\right)\right\}$$

⟨*⟩+≡

```
)clear all

--S 11
aa:=integrate(1/((a*x+b)^2*(p*x+q)),x)
--R
--R
--R        (a p x + b p)log(p x + q) + (- a p x - b p)log(a x + b) - a q + b p
--R   (1)  ------------------------------------------------------------------
--R                  3 2     2           2 2      2   2       2       3 2
--R               (a q  - 2a b p q + a b p )x + a b q  - 2a b p q + b p
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 12
bb:=1/(b*p-a*q)*(1/(a*x+b)+p/(b*p-a*q)*log((p*x+q)/(a*x+b)))
--R
--R
--R                                  p x + q
--R                 (a p x + b p)log(-------) - a q + b p
--R                                  a x + b
--R   (2)  ------------------------------------------------------
--R           3 2     2           2 2      2   2       2       3 2
--R        (a q  - 2a b p q + a b p )x + a b q  - 2a b p q + b p
--R                                                 Type: Expression Integer
--E

--S 13
cc:=aa-bb
--R
--R
--R                                              p x + q
--R        p log(p x + q) - p log(a x + b) - p log(-------)
--R                                              a x + b
--R   (3)  ------------------------------------------------
--R                       2 2              2 2
--R                     a q  - 2a b p q + b p
--R                                                 Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 14
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R            a
--R   (4)  log(-) == - log(b) + log(a)
--R            b
--R                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 15     14:107 Schaums and Axiom agree
dd:=divlog cc
--R
--R   (5)  0
--R                                                          Type: Expression Integer
--E
```

## 4 [1]:14.108 $\int \frac{x\ dx}{(ax+b)^2(px+q)}$

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\left\{\frac{q}{bp-aq}\ \ln\left(\frac{ax+b}{px+q}\right) - \frac{b}{a(ax+b)}\right\}$$

⟨*⟩+≡

```
)clear all

--S 16
aa:=integrate(x/((a*x+b)^2*(p*x+q)),x)
--R
--R
--R   (1)
--R       2                              2                                      2
--R   (- a q x - a b q)log(p x + q) + (a q x + a b q)log(a x + b) + a b q - b p
--R   ------------------------------------------------------------------------
--R             4 2     3         2 2 2      3   2     2 2         3 2
--R           (a q  - 2a b p q + a b p )x + a b q  - 2a b p q + a b p
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 17
bb:=1/(b*p-a*q)*(q/(b*p-a*q)*log((a*x+b)/(p*x+q))-b/(a*(a*x+b)))
--R
--R
--R                 2               a x + b             2
--R               (a q x + a b q)log(-------) + a b q - b p
--R                                  p x + q
--R   (2)  ------------------------------------------------------
--R           4 2     3         2 2 2      3   2     2 2         3 2
--R         (a q  - 2a b p q + a b p )x + a b q  - 2a b p q + a b p
--R                                                  Type: Expression Integer
--E

--S 18
cc:=aa-bb
--R
--R
--R                                                 a x + b
--R       - q log(p x + q) + q log(a x + b) - q log(-------)
--R                                                 p x + q
--R   (3)  ------------------------------------------------
--R                        2 2              2 2
--R                       a q  - 2a b p q + b p
--R                                                  Type: Expression Integer
```

```
--E

--S 19
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R            a
--R   (4)  log(-) == - log(b) + log(a)
--R            b
--R                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 20     14:108 Schaums and Axiom agree
dd:=divlog cc
--R
--R   (5)  0
--R                                                        Type: Expression Integer
--E
```

## 5 [1]:14.109 $\int \frac{x^2\ dx}{(ax+b)^2(px+q)}$

$$\int \frac{x^2}{(ax+b)^2(px+q)} =$$

$$\frac{b^2}{(bp-aq)a^2(ax+b)} + \frac{1}{(bp-aq)^2}\left\{\frac{q^2}{p}\ \ln(px+q) + \frac{b(bp-2aq)}{a^2}\ \ln(ax+b)\right\}$$

⟨*⟩+≡

```
)clear all

--S 21
aa:=integrate(x^2/((a*x+b)^2*(p*x+q)),x)
--R
--R
--R   (1)
--R         3 2     2   2
--R       (a q x + a b q )log(p x + q)
--R     +
--R              2           2 2         2       3 2                    2       3 2
--R       ((- 2a b p q + a b p )x - 2a b p q + b p )log(a x + b) - a b p q + b p
--R  /
--R       5   2     4   2     3 2 3      4     2     3 2 2     2 3 3
--R     (a p q  - 2a b p q + a b p )x + a b p q  - 2a b p q + a b p
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 22
bb:=b^2/((b*p-a*q)*a^2*(a*x+b))+_
     1/(b*p-a*q)^2*(q^2/p*log(p*x+q)+((b*(b*p-2*a*q))/a^2)*log(a*x+b))
--R
--R
--R   (2)
--R         3 2     2   2
--R       (a q x + a b q )log(p x + q)
--R     +
--R              2           2 2         2       3 2                    2       3 2
--R       ((- 2a b p q + a b p )x - 2a b p q + b p )log(a x + b) - a b p q + b p
--R  /
--R       5   2     4   2     3 2 3      4     2     3 2 2     2 3 3
--R     (a p q  - 2a b p q + a b p )x + a b p q  - 2a b p q + a b p
--R                                                 Type: Expression Integer
--E

--S 23     14:109 Schaums and Axiom agree
```

```
cc:=aa-bb
--R
--R
--R   (3)  0
--R                                                    Type: Expression Integer
--E
```

## 6 [1]:14.110 $\int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^n}$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^m(px+q)^n} =$$

$$\frac{-1}{(n-1)(bp-aq)}\left\{\frac{1}{(ax+b)^{m-1}(px+q)^{n-1}} + a(m+n-2)\int \frac{1}{(ax+b)^m(px+q)^{n-1}}\right\}$$

⟨*⟩+≡

```
)clear all

--S 24     14:110 Axiom cannot do this integral
aa:=integrate(1/((a*x+b)^m*(p*x+q)^n),x)
--R
--R
--R           x
--R         ++              1
--I   (1)   |   ---------------------- d%L
--R        ++              m           n
--I             (b + %L a) (q + %L p)
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

## 7 [1]:14.111 $\int \frac{ax+b}{px+q}\,dx$

$$\int \frac{ax+b}{px+q} = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2}\ \ln(px+q)$$

⟨*⟩+≡

```
)clear all

--S 25
aa:=integrate((a*x+b)/(p*x+q),x)
--R
--R
--R        (- a q + b p)log(p x + q) + a p x
--R   (1)  --------------------------------
--R                         2
--R                        p
--R                                        Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 26
bb:=(a*x)/p+(b*p-a*q)/p^2*log(p*x+q)
--R
--R
--R        (- a q + b p)log(p x + q) + a p x
--R   (2)  --------------------------------
--R                         2
--R                        p
--R                                                  Type: Expression Integer
--E

--S 27     14:111 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R
--R   (3)  0
--R                                                  Type: Expression Integer
--E
```

## 8 [1]:14.112 $\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n}\,dx$

$$\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n} = \begin{cases} \frac{-1}{(n-1)(bp-aq)}\left\{\frac{(ax+b)^{m+1}}{(px+q)^{n-1}} + (n-m-2)a\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}}\right\} \\ \frac{-1}{(n-m-1)p} + \left\{\frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} + m(bp-aq)\int \frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^n}\right\} \\ \frac{-1}{(n-1)p}\left\{\frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} - ma\int \frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^{n-1}}\right\} \end{cases}$$

⟨*⟩+≡

```
)clear all

--S 28     14:112 Axiom cannot do this integral
aa:=integrate((a*x+b)^m/(p*x+q)^n,x)
--R
--R
--R           x           m
--I         ++  (b + %L a)
--I   (1)   |   ----------- d%L
--R        ++             n
--I             (q + %L p)
--R                                        Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

⟨*⟩+≡

```
)spool
)lisp (bye)
```

# References

[1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables* Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp62-63