

\$SPAD/input schaum19.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.399	$\int \sin ax \cos ax \, dx$	3
2	[1]:14.400	$\int \sin px \cos qx \, dx$	5
3	[1]:14.401	$\int \sin^n ax \cos ax \, dx$ provided $n \neq -1$	7
4	[1]:14.402	$\int \cos^n ax * \sin ax \, dx$ provided $n \neq -1$	9
5	[1]:14.403	$\int \sin^2 ax \cos^2 ax$	11
6	[1]:14.404	$\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax}$	12
7	[1]:14.405	$\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos ax}$	14
8	[1]:14.406	$\int \frac{dx}{\sin ax \cos^2 ax}$	17
9	[1]:14.407	$\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax}$	19
10	[1]:14.408	$\int \frac{\sin^2 ax}{\cos ax} \, dx$	21
11	[1]:14.409	$\int \frac{\cos^2 ax}{\sin ax} \, dx$	24
12	[1]:14.410	$\int \frac{dx}{\cos ax(1 \pm \sin ax)}$	26
13	[1]:14.411	$\int \frac{dx}{\sin ax(1 \pm \cos ax)}$	31
14	[1]:14.412	$\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax}$	35
15	[1]:14.413	$\int \frac{\sin ax \, dx}{\sin ax \pm \cos ax}$	38
16	[1]:14.414	$\int \frac{\cos ax \, dx}{\sin ax \pm \cos ax}$	41

17 [1]:14.415	$\int \frac{\sin ax \, dx}{p + q \cos ax}$	44
18 [1]:14.416	$\int \frac{\cos ax \, dx}{p + q \sin ax}$	46
19 [1]:14.417	$\int \frac{\sin ax \, dx}{(p + q \cos ax)^n}$	48
20 [1]:14.418	$\int \frac{\cos ax \, dx}{(p + q \sin ax)^n}$	50
21 [1]:14.419	$\int \frac{dx}{p \sin ax + q \cos ax}$	52
22 [1]:14.420	$\int \frac{dx}{p \sin ax + q \cos ax + r}$	55
23 [1]:14.421	$\int \frac{dx}{p \sin ax + q(1 + \cos ax)}$	60
24 [1]:14.422	$\int \frac{dx}{p \sin ax + q \cos ax \pm \sqrt{p^2 + q^2}}$	62
25 [1]:14.423	$\int \frac{dx}{p^2 \sin^2 ax + q^2 \cos^2 ax}$	69
26 [1]:14.424	$\int \frac{dx}{p^2 \sin^2 ax - q^2 \cos^2 ax}$	71
27 [1]:14.425	$\int \sin^m ax \cos^n ax \, dx$	73
28 [1]:14.426	$\int \frac{\sin^m ax}{\cos^n ax} \, dx$	74
29 [1]:14.427	$\int \frac{\cos^m ax}{\sin^n ax} \, dx$	75
30 [1]:14.428	$\int \frac{dx}{\sin^m ax \cos^n ax}$	76

1 [1]:14.399 $\int \sin ax \cos ax \, dx$

$$\int \sin ax \cos ax = \frac{\sin^2 ax}{2a}$$

<*)≡

```
)spool schaum19.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all
```

--S 1

```
aa:=integrate(sin(a*x)*cos(a*x),x)
```

--R

--R

```
--R          2
--R      cos(a x)
--R (1)  -----
--R          2a
```

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 2

```
bb:=sin(a*x)^2/(2*a)
```

--R

```
--R          2
--R      sin(a x)
--R (2)  -----
--R          2a
```

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 3

```
cc:=aa-bb
```

--R

```
--R          2          2
--R      - sin(a x) - cos(a x)
--R (3)  -----
--R          2a
```

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 4

```
cosqrrule:=rule(cos(a)^2 == 1-sin(a)^2)
```

--R

```
--R          2          2
```

```

--R (4) cos(a) == - sin(a) + 1
--R                                         Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 5      14:399 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=cossqrrule cc
--R
--R      1
--R (5)  - --
--R      2a
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

2 [1]:14.400 $\int \sin px \cos qx \, dx$

$$\int \sin px \cos qx = -\frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 6
aa:=integrate(sin(p*x)*cos(q*x),x)
--R
--R
--R      q sin(p x)sin(q x) + p cos(p x)cos(q x)
--R (1) -----
--R                    2      2
--R                   q  - p
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 7
bb:=-cos((p-q)*x)/(2*(p-q))-cos((p+q)*x)/(2*(p+q))
--R
--R      (- q + p)cos((q + p)x) + (q + p)cos((q - p)x)
--R (2) -----
--R                    2      2
--R                   2q  - 2p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 8
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      2q sin(p x)sin(q x) + (q - p)cos((q + p)x) + 2p cos(p x)cos(q x)
--R      +
--R      (- q - p)cos((q - p)x)
--R      /
--R      2      2
--R     2q  - 2p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 9      14:400 Schaums and Axiom agree
complexNormalize cc
--R
--R (4)  0

```

--R
--E

Type: Expression Integer

3 [1]:14.401 $\int \sin^n ax \cos ax \, dx$ provided $n \neq -1$

$$\int \sin^n ax \cos ax = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 10
aa:=integrate(sin(a*x)^n*cos(a*x),x)
--R
--R
--R          n log(sin(a x))
--R      sin(a x)%e
--R (1)  -----
--R          a n + a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 11
bb:=sin(a*x)^(n+1)/((n+1)*a)
--R
--R          n + 1
--R      sin(a x)
--R (2)  -----
--R          a n + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 12
cc:=aa-bb
--R
--R          n log(sin(a x))          n + 1
--R      sin(a x)%e          - sin(a x)
--R (3)  -----
--R          a n + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 13
explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)
--R
--R          n log(x)          n
--R (4)  %e          == x
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```



```

--S 14
dd:=explog cc
--R
--R
--R      n + 1      n
--R      - sin(a x)  + sin(a x)sin(a x)
--R (5) -----
--R              a n + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 15      14:401 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R (6)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

4 [1]:14.402 $\int \cos^n ax * sinax dx$ provided $n \neq -1$

$$\int \cos^n ax * sinax = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 16
aa:=integrate(cos(a*x)^n*sin(a*x),x)
--R
--R
--R              n log(cos(a x))
--R      cos(a x)%e
--R (1)  -----
--R            a n + a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 17
bb:=-cos(a*x)^(n+1)/((n+1)*a)
--R
--R              n + 1
--R      cos(a x)
--R (2)  -----
--R            a n + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 18
cc:=aa-bb
--R
--R              n log(cos(a x))              n + 1
--R      - cos(a x)%e              + cos(a x)
--R (3)  -----
--R            a n + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 19
explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)
--R
--R              n log(x)      n
--R (4)  %e              == x
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

```

--E

--S 20

dd:=explog cc

--R

--R
$$\cos(a x)^{n+1} - \cos(a x)\cos(a x)^n$$

--R (5) -----

--R
$$a^{n+1} + a$$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 21 14:402 Schaums and Axiom agree

ee:=complexNormalize dd

--R

--R (6) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

5 [1]:14.403 $\int \sin^2 ax \cos^2 ax$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 22
aa:=integrate(sin(a*x)^2*cos(a*x)^2,x)
--R
--R
--R
--R          3
--R      (- 2cos(a x)  + cos(a x))sin(a x) + a x
--R (1) -----
--R                               8a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 23
bb:=x/8-sin(4*a*x)/(32*a)
--R
--R
--R      - sin(4a x) + 4a x
--R (2) -----
--R                32a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 24
cc:=aa-bb
--R
--R
--R          3
--R      sin(4a x) + (- 8cos(a x)  + 4cos(a x))sin(a x)
--R (3) -----
--R                               32a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 25      14:403 Schaums and Axiom agree
dd:=complexNormalize cc
--R
--R
--R (4)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

6 [1]:14.404 $\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax}$
 $\int \frac{1}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln |\tan ax|$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 26
aa:=integrate(1/(sin(a*x)*cos(a*x)),x)
--R
--R
--R      sin(a x)      2cos(a x)
--R      log(-----) - log(- -----)
--R      cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                               a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 27
bb:=1/a*log(tan(a*x))
--R
--R      log(tan(a x))
--R (2) -----
--R              a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 28
cc:=aa-bb
--R
--R      sin(a x)      2cos(a x)
--R      - log(tan(a x)) + log(-----) - log(- -----)
--R      cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R (3) -----
--R                               a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 29
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R      sin(a)
--R (4) tan(a) == -----
--R
```

```

--R          cos(a)
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 30
dd:=tanrule cc
--R
--R          sin(a x)      sin(a x)      2cos(a x)
--R      - log(-----) + log(-----) - log(-----)
--R          cos(a x)      cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R      (5) -----
--R                                  a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 31      14:404 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=expandLog dd
--R
--R          log(- 2)
--R      (6) - -----
--R              a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

7 [1]:14.405 $\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos ax}$

$$\int \frac{1}{\sin^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a \sin ax}$$

<*)+=

)clear all

--S 32

aa:=integrate(1/(sin(a*x)^2*cos(a*x)),x)

--R

--R

--R (1)

--R
$$\sin(ax) \log\left(\frac{\sin(ax) + \cos(ax) + 1}{\cos(ax) + 1}\right)$$

--R +

--R
$$- \sin(ax) \log\left(\frac{\sin(ax) - \cos(ax) - 1}{\cos(ax) + 1}\right) - 1$$

--R /

--R a sin(a x)

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 33

bb:=1/a*log(tan(%pi/4+(a*x)/2))-1/(a*sin(a*x))

--R

--R
$$\sin(ax) \log\left(\tan\left(\frac{2ax + \pi}{4}\right)\right) - 1$$

--R (2) -----

--R a sin(a x)

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 34

cc:=aa-bb

--R

--R (3)

--R
$$- \log\left(\tan\left(\frac{2ax + \pi}{4}\right)\right) + \log\left(\frac{\sin(ax) + \cos(ax) + 1}{\cos(ax) + 1}\right)$$

--R +

--R
$$\sin(ax) - \cos(ax) - 1$$

```

--R      - log(-----)
--R                cos(a x) + 1
--R /
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 35
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R      sin(a)
--R      (4) tan(a) == -----
--R      cos(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 36
dd:=tanrule cc
--R
--R      (5)
--R      sin(a x) + cos(a x) + 1      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      log(-----) - log(-----)
--R      cos(a x) + 1                cos(a x) + 1
--R
--R      +
--R      2a x + %pi
--R      sin(-----)
--R      4
--R
--R      - log(-----)
--R      2a x + %pi
--R      cos(-----)
--R      4
--R
--R /
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 37
ee:=expandLog dd
--R
--R      (6)
--R      log(sin(a x) + cos(a x) + 1) - log(sin(a x) - cos(a x) - 1)
--R      +
--R      2a x + %pi      2a x + %pi
--R      - log(sin(-----)) + log(cos(-----))
--R      4                4
--R
--R /

```



```
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 38      14:405 Schaums and Axiom differ by a constant
ff:=complexNormalize %
```

```
--R
--R      log(- 1)
--R  (7)  -----
--R           a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

8 [1]:14.406 $\int \frac{dx}{\sin ax \cos^2 ax}$

$$\int \frac{1}{\sin ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2} + \frac{1}{a \cos ax}$$

(*)+=
)clear all

```
--S 39
aa:=integrate(1/(sin(a*x)*cos(a*x)^2),x)
--R
--R
--R          sin(a x)
--R      cos(a x)log(-----) + cos(a x) + 1
--R          cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R          a cos(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 40
bb:=1/a*log(tan((a*x)/2))+1/(a*cos(a*x))
--R
--R          a x
--R      cos(a x)log(tan(---)) + 1
--R          2
--R (2) -----
--R          a cos(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 41
cc:=aa-bb
--R
--R          a x          sin(a x)
--R      - log(tan(---)) + log(-----) + 1
--R          2          cos(a x) + 1
--R (3) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 42
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
```

```

--R          sin(a)
--R (4) tan(a) == -----
--R                   cos(a)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 43
dd:=tanrule cc
--R
--R          a x
--R        sin(---)
--R          2
--R      sin(a x)
--R log(-----) - log(-----) + 1
--R      cos(a x) + 1      a x
--R                       cos(---)
--R                       2
--R (5) -----
--R                               a
--R                                               Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 44
ee:=expandLog dd
--R
--R          a x
--R      log(sin(a x)) - log(sin(---)) - log(cos(a x) + 1) + log(cos(---)) + 1
--R                          2
--R                          2
--R (6) -----
--R                               a
--R                                               Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 45      14:406 Schaums and Axiom differ by a constant
ff:=complexNormalize ee
--R
--R      1
--R (7) -
--R      a
--R                                               Type: Expression Integer
--E

```

9 [1]:14.407 $\int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax}$

$$\int \frac{1}{\sin^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2 \cot 2ax}{a}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 46
aa:=integrate(1/(sin(a*x)^2*cos(a*x)^2),x)
--R
--R
--R
--R          2
--R      - 2cos(a x)  + 1
--R (1)  -----
--R      a cos(a x)sin(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 47
bb:=- (2*cot(2*a*x))/a
--R
--R
--R      2cot(2a x)
--R (2)  - -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 48
cc:=aa-bb
--R
--R
--R          2
--R      2cos(a x)cot(2a x)sin(a x) - 2cos(a x)  + 1
--R (3)  -----
--R      a cos(a x)sin(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 49
cotrule:=rule(cot(a) == cos(a)/sin(a))
--R
--R
--R      cos(a)
--R (4)  cot(a) == -----
--R      sin(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

```

--E

--S 50

dd:=cotrule cc

--R

--R

--R $(- 2\cos(ax)^2 + 1)\sin(2ax) + 2\cos(ax)\cos(2ax)\sin(ax)$

--R (5) -----

--R $a \cos(ax)\sin(ax)\sin(2ax)$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 51 14:407 Schaums and Axiom agree

ee:=complexNormalize dd

--R

--R (6) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

10 [1]:14.408 $\int \frac{\sin^2 ax}{\cos ax} dx$

$$\int \frac{\sin^2 ax}{\cos ax} = -\frac{\sin ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 52
```

```
aa:=integrate(sin(a*x)^2/cos(a*x),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      sin(a x) + cos(a x) + 1      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      log(-----) - log(-----) - sin(a x)
--R      cos(a x) + 1              cos(a x) + 1
```

```
--R (1) -----
--R                                     a
```

```
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 53
```

```
bb:=-sin(a*x)/a+1/a*log(tan((a*x)/2+%pi/4))
```

```
--R
```

```
--R      2a x + %pi
--R      log(tan(-----)) - sin(a x)
--R      4
```

```
--R (2) -----
--R      a
```

```
--R                                     Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 54
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R (3)
```

```
--R      2a x + %pi      sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      - log(tan(-----)) + log(-----)
--R      4              cos(a x) + 1
```

```
--R +
```

```
--R      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      - log(-----)
--R      cos(a x) + 1
```

```
--R /
```

```
--R a
```

```
--R
```

```
Type: Expression Integer
```

--E

--S 55

tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))

--R

$$(4) \quad \tan(a) == \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

--R Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

--E

--S 56

dd:=tanrule cc

--R

--R (5)

$$\log\left(\frac{\sin(ax) + \cos(ax) + 1}{\cos(ax) + 1}\right) - \log\left(\frac{\sin(ax) - \cos(ax) - 1}{\cos(ax) + 1}\right)$$

--R +

$$\frac{\sin\left(\frac{2ax + \pi}{4}\right)}{4}$$

--R - log(-----)

$$\frac{\cos\left(\frac{2ax + \pi}{4}\right)}{4}$$

--R /

--R a

Type: Expression Integer

--E

--S 57

ee:=expandLog dd

--R

--R (6)

$$\log(\sin(ax) + \cos(ax) + 1) - \log(\sin(ax) - \cos(ax) - 1)$$

--R +

$$- \log\left(\sin\left(\frac{2ax + \pi}{4}\right)\right) + \log\left(\cos\left(\frac{2ax + \pi}{4}\right)\right)$$

--R /

--R a

Type: Expression Integer

--E

--S 58 14:408 Schaums and Axiom differ by a constant

```
ff:=complexNormalize ee
```

```
--R
```

```
--R      log(- 1)
```

```
--R (7)  -----
```

```
--R      a
```

```
--R
```

Type: Expression Integer

```
--E
```


11 [1]:14.409 $\int \frac{\cos^2 ax}{\sin ax} dx$

$$\int \frac{\cos^2 ax}{\sin ax} = \frac{\cos ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2}$$

(*)+≡
)clear all

--S 59
aa:=integrate(cos(a*x)^2/sin(a*x),x)

--R
--R
--R sin(a x)
--R log(-----) + cos(a x)
--R cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R a

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 60
bb:=cos(a*x)/a+1/a*log(tan((a*x)/2))

--R
--R a x
--R log(tan(---)) + cos(a x)
--R 2
--R (2) -----
--R a

Type: Expression Integer

--E

--S 61
cc:=aa-bb

--R
--R a x sin(a x)
--R - log(tan(---)) + log(-----)
--R 2 cos(a x) + 1
--R (3) -----
--R a

Type: Expression Integer

--E

--S 62
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))

--R

```

--R          sin(a)
--R (4) tan(a) == -----
--R          cos(a)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 63
dd:=tanrule cc
--R
--R          a x
--R          sin(---)
--R          2
--R          sin(a x)
--R          log(-----) - log(-----)
--R          cos(a x) + 1          a x
--R                               cos(---)
--R                               2
--R (5) -----
--R          a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 64
ee:=expandLog dd
--R
--R          a x          a x
--R          log(sin(a x)) - log(sin(---)) - log(cos(a x) + 1) + log(cos(---))
--R                               2                               2
--R (6) -----
--R          a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 65      14:409 Schaums and Axiom agree
ff:=complexNormalize ee
--R
--R (7) 0
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

12 [1]:14.410 $\int \frac{dx}{\cos ax(1 \pm \sin ax)}$

$$\int \frac{1}{\cos ax(1 \pm \sin ax)} = \mp \frac{1}{2a(1 \pm \sin ax)} + \frac{1}{2a} \ln \tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

(*)+=
)clear all

--S 66

aa:=integrate(1/(cos(a*x)*(1+sin(a*x))),x)

--R

--R

--R (1)

$$\begin{aligned} & \frac{(\sin(ax) + 1) \log\left(\frac{\sin(ax) + \cos(ax) + 1}{\cos(ax) + 1}\right) + (-\sin(ax) - 1) \log\left(\frac{\sin(ax) - \cos(ax) - 1}{\cos(ax) + 1}\right) + \sin(ax)}{2a \sin(ax) + 2a} \end{aligned}$$

--R /

--R 2a sin(a x) + 2a

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 67

bb:=-1/(2*a*(1+sin(a*x)))+1/(2*a)*log(tan((a*x)/2+%pi/4))

--R

--R

--R (2)

$$\frac{(\sin(ax) + 1) \log\left(\tan\left(\frac{2ax + \pi}{4}\right)\right) - 1}{2a \sin(ax) + 2a}$$

--R

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 68

cc:=aa-bb

--R

--R (3)

$$\begin{aligned} & -\log\left(\tan\left(\frac{2ax + \pi}{4}\right)\right) + \log\left(\frac{\sin(ax) + \cos(ax) + 1}{\cos(ax) + 1}\right) \\ & + \sin(ax) - \cos(ax) - 1 \end{aligned}$$

```

--R      - log(-----) + 1
--R              cos(a x) + 1
--R /
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 69
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R      sin(a)
--R      (4) tan(a) == -----
--R      cos(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 70
dd:=tanrule cc
--R
--R      (5)
--R      sin(a x) + cos(a x) + 1      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      log(-----) - log(-----)
--R      cos(a x) + 1                cos(a x) + 1
--R
--R      +
--R      2a x + %pi
--R      sin(-----)
--R      4
--R
--R      - log(-----) + 1
--R      2a x + %pi
--R      cos(-----)
--R      4
--R
--R /
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 71
ee:=expandLog dd
--R
--R      (6)
--R      log(sin(a x) + cos(a x) + 1) - log(sin(a x) - cos(a x) - 1)
--R      +
--R      2a x + %pi      2a x + %pi
--R      - log(sin(-----)) + log(cos(-----)) + 1
--R      4                4
--R
--R /

```

```

--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 72
ff:=complexNormalize ee
--R
--R      log(- 1) + 1
--R  (7)  -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```
)clear all
```

```

--S 73
aa:=integrate(1/(cos(a*x)*(1-sin(a*x))),x)
--R
--R
--R  (1)
--R      sin(a x) + cos(a x) + 1
--R  (sin(a x) - 1)log(-----)
--R                        cos(a x) + 1
--R  +
--R      sin(a x) - cos(a x) - 1
--R  (- sin(a x) + 1)log(-----) - sin(a x)
--R                        cos(a x) + 1
--R  /
--R  2a sin(a x) - 2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 74
bb:=1/(2*a*(1-sin(a*x)))+1/(2*a)*log(tan((a*x)/2+%pi/4))
--R
--R      2a x + %pi
--R  (sin(a x) - 1)log(tan(-----)) - 1
--R                        4
--R  (2)  -----
--R      2a sin(a x) - 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 75
cc:=aa-bb
--R

```

```

--R (3)
--R          2a x + %pi          sin(a x) + cos(a x) + 1
--R      - log(tan(-----)) + log(-----)
--R          4                      cos(a x) + 1
--R      +
--R          sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      - log(-----) - 1
--R          cos(a x) + 1
--R      /
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 76
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R          sin(a)
--R      (4) tan(a) == -----
--R          cos(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 77
dd:=tanrule cc
--R
--R      (5)
--R          sin(a x) + cos(a x) + 1          sin(a x) - cos(a x) - 1
--R      log(-----) - log(-----)
--R          cos(a x) + 1                      cos(a x) + 1
--R      +
--R          2a x + %pi
--R          sin(-----)
--R          4
--R      - log(-----) - 1
--R          2a x + %pi
--R          cos(-----)
--R          4
--R      /
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 78
ee:=expandLog dd
--R
--R      (6)

```

```

--R      log(sin(a x) + cos(a x) + 1) - log(sin(a x) - cos(a x) - 1)
--R      +
--R      2a x + %pi      2a x + %pi
--R      - log(sin(-----)) + log(cos(-----)) - 1
--R      4      4
--R      /
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 79      14:410 Schaums and Axiom differ by a constant
ff:=complexNormalize ee

```

```

--R
--R      log(- 1) - 1
--R      (7) -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

13 [1]:14.411 $\int \frac{dx}{\sin ax(1 \pm \cos ax)}$

$$\int \frac{1}{\sin ax(1 \pm \cos ax)} = \pm \frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a} \ln \tan \frac{ax}{2}$$

(*)+=
)clear all

--S 80

aa:=integrate(1/(sin(a*x)*(1+cos(a*x))),x)

--R

--R

$$\frac{\sin(ax)}{(2\cos(ax) + 2)\log\left(\frac{\sin(ax)}{\cos(ax) + 1}\right) - \cos(ax) + 1}$$

--R (1) -----

$$4a \cos(ax) + 4a$$

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 81

bb:=1/(2*a*(1+cos(a*x)))+1/(2*a)*log(tan((a*x)/2))

--R

--R

$$(\cos(ax) + 1)\log\left(\tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right) + 1$$

--R (2) -----

$$2a \cos(ax) + 2a$$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 82

cc:=aa-bb

--R

$$-2\log\left(\tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right) + 2\log\left(\frac{\sin(ax)}{\cos(ax) + 1}\right) - 1$$

--R (3) -----

$$4a$$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 83

tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))

--R


```

--R          sin(a)
--R (4) tan(a) == -----
--R          cos(a)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 84
dd:=tanrule cc
--R
--R          a x
--R          sin(---)
--R          2
--R          sin(a x)
--R          2log(-----) - 2log(-----) - 1
--R          cos(a x) + 1          a x
--R                               cos(---)
--R                               2
--R (5) -----
--R                               4a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 85
ee:=expandLog dd
--R
--R (6)
--R          a x
--R          2log(sin(a x)) - 2log(sin(---)) - 2log(cos(a x) + 1) + 2log(cos(---)) - 1
--R                               2
--R                               2
--R -----
--R                               4a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 86
ff:=complexNormalize ee
--R
--R          1
--R (7)  - --
--R          4a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

)clear all

```

--S 87
aa:=integrate(1/(sin(a*x)*(1-cos(a*x))),x)

```

```

--R
--R
--R              sin(a x)
--R      (2cos(a x) - 2)log(-----) + cos(a x) + 1
--R                          cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                    4a cos(a x) - 4a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 88
bb:=-1/(2*a*(1-cos(a*x)))+1/(2*a)*log(tan((a*x)/2))
--R
--R              a x
--R      (cos(a x) - 1)log(tan(---)) + 1
--R                          2
--R (2) -----
--R                    2a cos(a x) - 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 89
cc:=aa-bb
--R
--R              a x          sin(a x)
--R      - 2log(tan(---)) + 2log(-----) + 1
--R                          2          cos(a x) + 1
--R (3) -----
--R                    4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 90
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R              sin(a)
--R (4) tan(a) == -----
--R              cos(a)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 91
dd:=tanrule cc
--R
--R              a x
--R              sin(---)

```

```

--R          sin(a x)          2
--R      2log(-----) - 2log(-----) + 1
--R          cos(a x) + 1          a x
--R                                 cos(---)
--R                                 2
--R (5) -----
--R                                 4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 92
ee:=expandLog dd
--R
--R (6)
--R          a x          a x
--R      2log(sin(a x)) - 2log(sin(---)) - 2log(cos(a x) + 1) + 2log(cos(---)) + 1
--R                                 2                                 2
--R -----
--R                                 4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 93      14:411 Schaums and Axiom differ by a constant
ff:=complexNormalize ee
--R
--R          1
--R (7)  --
--R          4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

14 [1]:14.412 $\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax}$

$$\int \frac{1}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \tan\left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right)$$

(*)+≡
)clear all

```
--S 94
aa:=integrate(1/(sin(a*x)+cos(a*x)),x)
--R
--R
--R          +-+          +-+          +-+
--R      +-+  (- \|2 + 1)sin(a x) + (\|2 - 1)cos(a x) + \|2 - 2
--R      \|2 log(-----)
--R                                     sin(a x) + cos(a x)
--R (1) -----
--R                                     2a
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 95
bb:=1/(a*sqrt(2))*log(tan((a*x)/2+%pi/8))
--R
--R          +-+          4a x + %pi
--R      \|2 log(tan(-----))
--R                                     8
--R (2) -----
--R                                     2a
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 96
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          +-+          4a x + %pi
--R      - \|2 log(tan(-----))
--R                                     8
--R      +
--R          +-+          +-+          +-+
--R      +-+  (- \|2 + 1)sin(a x) + (\|2 - 1)cos(a x) + \|2 - 2
--R      \|2 log(-----)
--R                                     sin(a x) + cos(a x)
--R      /
```

```

--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 97
complexNormalize cc
--R
--R      +-+
--R      +-+  \|2 - 2
--R      \|2 log(-----)
--R      +-+
--R      \|2
--R      (4) -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```
)clear all
```

```

--S 98
aa:=integrate(1/(sin(a*x)-cos(a*x)),x)
--R
--R
--R      +-+      +-+      +-+
--R      +-+  (- \|2 + 1)sin(a x) + (- \|2 + 1)cos(a x) - \|2 + 2
--R      \|2 log(-----)
--R      sin(a x) - cos(a x)
--R      (1) -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 99
bb:=1/(a*sqrt(2))*log(tan((a*x)/2-%pi/8))
--R
--R      +-+      4a x - %pi
--R      \|2 log(tan(-----))
--R      8
--R      (2) -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 100
cc:=aa-bb
--R

```

```

--R (3)
--R      +-+      4a x - %pi
--R      - \|2 log(tan(-----))
--R                        8
--R      +
--R      +-+      +-+      +-+      +-+
--R      +-+      (- \|2 + 1)sin(a x) + (- \|2 + 1)cos(a x) - \|2 + 2
--R      \|2 log(-----)
--R                                  sin(a x) - cos(a x)
--R      /
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 101      14:412 Schaums and Axiom differ by a constant
complexNormalize cc

```

```

--R
--R      +-+      +-+
--R      \|2 log(\|2 - 1)
--R      (4) -----
--R              2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

15 [1]:14.413 $\int \frac{\sin ax \, dx}{\sin ax \pm \cos ax}$

$$\int \frac{\sin ax}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a} \ln(\sin ax \pm \cos ax)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 102
aa:=integrate(sin(a*x)/(sin(a*x)+cos(a*x)),x)
--R
--R
--R          2          - 2sin(a x) - 2cos(a x)
--R    log(-----) - log(-----) + a x
--R      cos(a x) + 1          cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                                 2a
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 103
bb:=x/2-1/(2*a)*log(sin(a*x)+cos(a*x))
--R
--R          - log(sin(a x) + cos(a x)) + a x
--R (2) -----
--R                                 2a
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 104
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          2          - 2sin(a x) - 2cos(a x)
--R    log(sin(a x) + cos(a x)) + log(-----) - log(-----)
--R                                 cos(a x) + 1          cos(a x) + 1
--R -----
--R                                 2a
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 105
dd:=expandLog cc
--R
--R    log(sin(a x) + cos(a x)) - log(- sin(a x) - cos(a x))

```

```

--R (4) -----
--R                                     2a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 106
ee:=complexNormalize dd

```

```

--R
--R      log(- 1)
--R (5) -----
--R          2a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

)clear all

```

```

--S 107
aa:=integrate(sin(a*x)/(sin(a*x)-cos(a*x)),x)

```

```

--R
--R
--R      2sin(a x) - 2cos(a x)          2
--R      log(-----) - log(-----) + a x
--R      cos(a x) + 1                cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                                     2a
--R
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 108
bb:=x/2+1/(2*a)*log(sin(a*x)-cos(a*x))

```

```

--R
--R      log(sin(a x) - cos(a x)) + a x
--R (2) -----
--R          2a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 109
cc:=aa-bb

```

```

--R
--R (3)
--R
--R      2sin(a x) - 2cos(a x)          2
--R      - log(sin(a x) - cos(a x)) + log(-----) - log(-----)
--R      cos(a x) + 1                cos(a x) + 1
--R -----
--R                                     2a

```



```
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 110      14:413 Schaums and Axiom agree
dd:=expandLog cc
--R
--R      (4)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

16 [1]:14.414 $\int \frac{\cos ax \, dx}{\sin ax \pm \cos ax}$

$$\int \frac{\cos ax}{\sin ax \pm \cos ax} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \ln(\sin ax \pm \cos ax)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 111
aa:=integrate(cos(a*x)/(sin(a*x)+cos(a*x)),x)
--R
--R
--R          2          - 2sin(a x) - 2cos(a x)
--R      - log(-----) + log(-----) + a x
--R          cos(a x) + 1          cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                                 2a
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 112
bb:=x/2+1/(2*a)*log(sin(a*x)+cos(a*x))
--R
--R      log(sin(a x) + cos(a x)) + a x
--R (2) -----
--R                                 2a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 113
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          2          - 2sin(a x) - 2cos(a x)
--R      - log(sin(a x) + cos(a x)) - log(-----) + log(-----)
--R          cos(a x) + 1          cos(a x) + 1
--R -----
--R                                 2a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 114
dd:=expandLog cc
--R
--R      - log(sin(a x) + cos(a x)) + log(- sin(a x) - cos(a x))

```

```

--R (4) -----
--R                                     2a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 115
ee:=complexNormalize dd
--R
--R      log(- 1)
--R (5)  -----
--R      2a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```
)clear all
```

```

--S 116
aa:=integrate(cos(a*x)/(sin(a*x)-cos(a*x)),x)
--R
--R
--R      2sin(a x) - 2cos(a x)      2
--R      log(-----) - log(-----) - a x
--R      cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                                     2a
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 117
bb:=-x/2+1/(2*a)*log(sin(a*x)-cos(a*x))
--R
--R      log(sin(a x) - cos(a x)) - a x
--R (2) -----
--R      2a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 118
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      2sin(a x) - 2cos(a x)      2
--R      - log(sin(a x) - cos(a x)) + log(-----) - log(-----)
--R      cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R -----
--R      2a

```

```
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 119      14:414 Schaums and Axiom agree
dd:=expandLog cc
--R
--R      (4)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

17 [1]:14.415 $\int \frac{\sin ax \, dx}{p + q \cos ax}$

$$\int \frac{\sin ax}{p + q \cos ax} = -\frac{1}{aq} \ln(p + q \cos ax)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 120
aa:=integrate(sin(a*x)/(p+q*cos(a*x)),x)
--R
--R
--R
--R          2          - 2q cos(a x) - 2p
--R    log(-----) - log(-----)
--R      cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                      a q
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 121
bb:=-1/(a*q)*log(p+q*cos(a*x))
--R
--R
--R      log(q cos(a x) + p)
--R (2) -----
--R          a q
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 122
cc:=aa-bb
--R
--R
--R          2          - 2q cos(a x) - 2p
--R    log(q cos(a x) + p) + log(-----) - log(-----)
--R      cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
--R (3) -----
--R                      a q
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 123
dd:=expandLog cc
--R
--R
--R      log(q cos(a x) + p) - log(- q cos(a x) - p)
--R (4) -----

```

```

--R
--R      a q
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 124      14:415 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd

```

```

--R
--R      log(- 1)
--R      (5) -----
--R             a q
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

18 [1]:14.416 $\int \frac{\cos ax \, dx}{p + q \sin ax}$

$$\int \frac{\cos ax}{p + q \sin ax} = \frac{1}{aq} \ln(p + q \sin ax)$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 125
```

```
aa:=integrate(cos(a*x)/(p+q*sin(a*x)),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      2q sin(a x) + 2p      2
--R      log(-----) - log(-----)
--R      cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
```

```
--R (1) -----
--R      a q
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 126
```

```
bb:=1/(a*q)*log(p+q*sin(a*x))
```

```
--R
```

```
--R      log(q sin(a x) + p)
```

```
--R (2) -----
--R      a q
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 127
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R      2q sin(a x) + 2p      2
--R      - log(q sin(a x) + p) + log(-----) - log(-----)
--R      cos(a x) + 1      cos(a x) + 1
```

```
--R (3) -----
--R      a q
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 128 14:416 Schaums and Axiom agree
```

```
dd:=expandLog cc
```

```
--R
```

```
--R (4) 0
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--R
```

--E

19 [1]:14.417
$$\int \frac{\sin ax \, dx}{(p + q \cos ax)^n}$$

$$\int \frac{\sin ax}{(p + q \cos ax)^n} = \frac{1}{aq(n-1)(p + q \cos ax)^{n-1}}$$

(*)+=
)clear all

--S 129

aa:=integrate(sin(a*x)/(p+q*cos(a*x))^n,x)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--E

--S 130

bb:=1/(a*q*(n-1)*(p+q*cos(a*x))^(n-1))

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--E

--S 131

cc:=aa-bb

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--E

--S 132

explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)

--R

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

Type: Expression Integer

Type: Expression Integer

```
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E
```

```
--S 133
dd:=explog cc
```

```
--R
--R                                     n                                     n - 1
--R      - (q cos(a x) + p)  + (q cos(a x) + p)(q cos(a x) + p)
--R (5) -----
--R                                     n - 1                                     n
--R      (a n - a)q (q cos(a x) + p)  (q cos(a x) + p)
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 134    14:417 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
```

```
--R
--R (6)  0
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

20 [1]:14.418 $\int \frac{\cos ax \, dx}{(p + q \sin ax)^n}$

$$\int \frac{\cos ax}{(p + q \sin ax)^n} = \frac{-1}{aq(n-1)(p + q \sin ax)^{n-1}}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 135
```

```
aa:=integrate(cos(a*x)/(p+q*sin(a*x))^n,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      - q sin(a x) - p
```

```
--R (1) -----
```

```
--R      n log(q sin(a x) + p)
```

```
--R      (a n - a)q %e
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 136
```

```
bb:=-1/(a*q*(n-1)*(p+q*sin(a*x))^(n-1))
```

```
--R
```

```
--R      1
```

```
--R (2) -----
```

```
--R      n - 1
```

```
--R      (a n - a)q (q sin(a x) + p)
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 137
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R      n log(q sin(a x) + p)
```

```
--R      %e      + (- q sin(a x) - p)(q sin(a x) + p)      n - 1
```

```
--R (3) -----
```

```
--R      n - 1 n log(q sin(a x) + p)
```

```
--R      (a n - a)q (q sin(a x) + p) %e
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 138
```

```
explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)
```

```
--R
```

```
--R      n log(x)      n
```

```
--R (4) %e      == x
```

```
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E
```

```
--S 139
dd:=explog cc
```

```
--R
--R                                     n                                     n - 1
--R      (q sin(a x) + p)  + (- q sin(a x) - p)(q sin(a x) + p)
--R  (5) -----
--R                                     n - 1                                     n
--R      (a n - a)q (q sin(a x) + p)      (q sin(a x) + p)
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 140      14:418 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
```

```
--R
--R  (6)  0
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

21 [1]:14.419 $\int \frac{dx}{p \sin ax + q \cos ax}$

$$\int \frac{1}{p \sin ax + q \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{p^2 + q^2}} \ln \tan\left(\frac{ax + \tan^{-1}(q/p)}{2}\right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 141
aa:=integrate(1/(p*sin(a*x)+q*cos(a*x)),x)
--R
--R
--R (1)
--R log
--R
--R          +-----+
--R          2      2      2 | 2      2
--R      (p q sin(a x) - p cos(a x) - q - p )\|q + p
--R    +
--R      3      2      2      3      2      3
--R      (- q - p q)sin(a x) + (p q + p )cos(a x) + p q + p
--R  /
--R      p sin(a x) + q cos(a x)
--R  /
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a\|q + p
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 142
bb:=1/(a*sqrt(p^2+q^2))*log(tan((a*x+atan(q/p))/2))
--R
--R
--R      q
--R      atan(-) + a x
--R      p
--R      log(tan(-----))
--R      2
--R  (2) -----
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a\|q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 143

```

cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R
--R      q
--R      atan(-) + a x
--R      p
--R      - log(tan(-----))
--R      2
--R
--R      +
--R      log
--R
--R      +-----+
--R      2      2      2      2      2
--R      (p q sin(a x) - p cos(a x) - q - p )\|q + p
--R
--R      +
--R      3      2      2      3      2      3
--R      (- q - p q)sin(a x) + (p q + p )cos(a x) + p q + p
--R
--R      /
--R      p sin(a x) + q cos(a x)
--R
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a\|q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 144
dd:=normalize cc
--R
--R
--R      +-----+
--R      | 2      2      2      2
--R      - 2p\|q + p + q + 2p
--R
--R      log(-----)
--R      +-----+
--R      2      3      | 2      2      4      2      2      4
--R      (3p q + 4p )\|q + p - q - 5p q - 4p
--R
--R      (4) - -----
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a\|q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 145      14:419 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=ratDenom dd

```

```

--R
--R      +-----+

```

```

--R      +-----+      | 2  2  2  2
--R      | 2  2      - p\|q + p  - q  - p
--R      \|q + p log(-----)
--R                                 4  2 2
--R                                 q + p q
--R (5) -----
--R                                 2  2
--R                                 a q + a p
--R
--R
--E

```

Type: Expression Integer

22 [1]:14.420

$$\int \frac{dx}{p \sin ax + q \cos ax + r}$$

$$\int \frac{1}{p \sin ax + q \cos ax + r} = \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{r^2 - p^2 - q^2}} \tan^{-1} \left(\frac{p + (r - q) \tan(ax/2)}{\sqrt{r^2 - p^2 - a^2}} \right) \\ \frac{1}{a\sqrt{p^2 + q^2 - r^2}} \ln \left(\frac{p - \sqrt{p^2 + q^2 - r^2} + (r - q) \tan(ax/2)}{p + \sqrt{p^2 + q^2 - r^2} + (r - q) \tan(ax/2)} \right) \end{cases}$$

(*)+=
)clear all

--S 146

aa:=integrate(1/(p*sin(a*x)+q*cos(a*x)+r),x)

--R

--R

--R (1)

--R [

--R log

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

$$\begin{aligned} & \log \left(\frac{(p^2 r - p^2 q) \sin^2(ax) + (-r^2 + q^2 r + p^2) \cos^2(ax) - q^2 r + q^2}{p^2} \right) \\ & * \frac{+-----+}{| \quad 2 \quad 2 \quad 2} \\ & \quad \sqrt{-r^2 + q^2 + p^2} \\ & + \frac{(r^3 - q^2 r^2 + (-q^2 - p^2)r + q^2 + p^2 q) \sin^3(ax) + (p^2 r^2 - p^2 q^2 - p^2) \cos^3(ax) + p^2 r^2 - p^2 q^2 - p^2}{p \sin(ax) + q \cos(ax) + r} \\ & / \frac{+-----+}{| \quad 2 \quad 2 \quad 2} \\ & \quad a \sqrt{-r^2 + q^2 + p^2} \\ & , \frac{+-----+}{| \quad 2 \quad 2 \quad 2} \\ & \quad ((r - q) \sin(ax) + p \cos(ax) + p) \sqrt{r^2 - q^2 - p^2} \\ & 2 \operatorname{atan}\left(\frac{((r - q) \sin(ax) + p \cos(ax) + p) \sqrt{r^2 - q^2 - p^2}}{a \sqrt{-r^2 + q^2 + p^2}}\right) \end{aligned}$$


```

--R          2 2 2          2 2 2
--R      (r - q - p )cos(a x) + r - q - p
--R      -----]
--R          +-----+
--R          | 2 2 2
--R      a\|r - q - p
--R                                          Type: Union(List Expression Integer,...)
--E

```

--S 147

bb1:=2/(a*sqrt(r^2-p^2-q^2))*atan((p+(r-q)*tan((a*x)/2))/sqrt(r^2-p^2-q^2))

```

--R
--R          a x
--R      (r - q)tan(---) + p
--R          2
--R      2atan(-----)
--R          +-----+
--R          | 2 2 2
--R          \|r - q - p
--R      (2) -----
--R          +-----+
--R          | 2 2 2
--R          a\|r - q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 148

bb2:=1/(a*sqrt(p^2+q^2-r^2))*log((p-sqrt(p^2+q^2-r^2)+(r-q)*tan((a*x)/2))/(p+sqrt(p^2+q^2-r^2)))

```

--R
--R          +-----+
--R          | 2 2 2          a x
--R      - \|- r + q + p  + (r - q)tan(---) + p
--R          2
--R      log(-----)
--R          +-----+
--R          | 2 2 2          a x
--R          \|- r + q + p  + (r - q)tan(---) + p
--R          2
--R      (3) -----
--R          +-----+
--R          | 2 2 2
--R          a\|- r + q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 149

```

cc1:=aa.1-bb1
--R
--R (4)
--R      +-----+
--R      | 2 2 2
--R      \|r - q - p
--R      *
--R      log
--R
--R      (p r - p q)sin(a x) + (- r + q r + p )cos(a x) - q r + q
--R      +
--R      2
--R      p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2 2
--R      \|- r + q + p
--R      +
--R      3 2 2 2 3 2
--R      (r - q r + (- q - p )r + q + p q)sin(a x)
--R      +
--R      2 2 3 2 2 3
--R      (p r - p q - p )cos(a x) + p r - p q - p
--R      /
--R      p sin(a x) + q cos(a x) + r
--R      +
--R      +-----+ a x
--R      | 2 2 2 (r - q)tan(---) + p
--R      - 2\|- r + q + p atan(-----)
--R      +-----+
--R      | 2 2 2
--R      \|r - q - p
--R      /
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2 2 2 | 2 2 2
--R      a\|- r + q + p \|r - q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 150
cc2:=aa.2-bb1
--R

```

```

--R (5)
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2 2

```

```

--R      ((r - q)sin(a x) + p cos(a x) + p)\|r  - q  - p
--R      2atan(-----)
--R      2      2      2      2      2      2
--R      (r  - q  - p )cos(a x) + r  - q  - p
--R      +
--R      a x
--R      (r - q)tan(---) + p
--R      2
--R      - 2atan(-----)
--R      +-----+
--R      | 2      2      2
--R      \|r  - q  - p
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2      2      2
--R      a\|r  - q  - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 151

cc3:=aa.1-bb2

--R

--R (6)

--R log

--R

$$(p r - p q) \sin(a x) + (-r^2 + q r + p) \cos(a x) - q r + q^2$$

--R

--R +

--R 2

--R p

--R *

--R +-----+

--R | 2 2 2

--R \|- r + q + p

--R +

--R 3 2 2 2 3 2

--R (r - q r + (- q - p)r + q + p q)sin(a x)

--R +

--R 2 2 3 2 2 3

--R (p r - p q - p)cos(a x) + p r - p q - p

--R /

--R p sin(a x) + q cos(a x) + r

--R +

--R +-----+

--R | 2 2 2

--R - \|- r + q + p

--R + (r - q)tan(---) + p

--R 2

```

--R      - log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2 2 2      a x
--R      \|- r + q + p  + (r - q)tan(---) + p
--R      2
--R /
--R      +-----+
--R      | 2 2 2
--R      a\|- r + q + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 152
cc4:=aa.2-bb2

```

```

--R (7)
--R      +-----+
--R      | 2 2 2      a x
--R      - \|- r + q + p  + (r - q)tan(---) + p
--R      2
--R      +-----+
--R      | 2 2 2
--R      - \|r - q - p log(-----)
--R      +-----+
--R      | 2 2 2      a x
--R      \|- r + q + p  + (r - q)tan(---) + p
--R      2
--R +
--R      +-----+
--R      | 2 2 2      ((r - q)sin(a x) + p cos(a x) + p)\|r - q - p
--R      2\|- r + q + p atan(-----)
--R      2 2 2      2 2 2
--R      (r - q - p)cos(a x) + r - q - p
--R /
--R      +-----+ +-----+
--R      | 2 2 2 | 2 2 2
--R      a\|- r + q + p \|r - q - p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 153 14:420 Schaums and Axiom agree
dd2:=normalize cc2

```

```

--R (8) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

23 [1]:14.421 $\int \frac{dx}{p \sin ax + q(1 + \cos ax)}$

$$\int \frac{1}{p \sin ax + q(1 + \cos ax)} = \frac{1}{ap} \ln \left(q + p \tan \frac{ax}{2} \right)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 154
```

```
aa:=integrate(1/(p*sin(a*x)+q*(1+cos(a*x))),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      p sin(a x) + q cos(a x) + q
--R      log(-----)
--R                      cos(a x) + 1
```

```
--R (1) -----
--R                      a p
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 155
```

```
bb:=1/(a*p)*log(q+p*tan((a*x)/2))
```

```
--R
```

```
--R      a x
--R      log(p tan(---) + q)
--R      2
```

```
--R (2) -----
--R      a p
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 156
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R      a x      p sin(a x) + q cos(a x) + q
--R      - log(p tan(---) + q) + log(-----)
--R      2                      cos(a x) + 1
```

```
--R (3) -----
--R                      a p
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 157
```

```
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
```

```
--R
```

```

--R          sin(a)
--R (4) tan(a) == -----
--R          cos(a)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 158
dd:=tanrule cc
--R
--R          a x          a x
--R          p sin(---) + q cos(---)
--R          2            2
--R          p sin(a x) + q cos(a x) + q
--R          log(-----) - log(-----)
--R          cos(a x) + 1          a x
--R                               cos(---)
--R                               2
--R (5) -----
--R                                     a p
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 159
ee:=expandLog dd
--R
--R (6)
--R          a x          a x
--R          log(p sin(---) + q cos(---) + q) - log(p sin(---) + q cos(---))
--R          2            2
--R          +
--R          a x
--R          - log(cos(a x) + 1) + log(cos(---))
--R          2
--R          /
--R          a p
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 160      14:421 Schaums and Axiom agree
ff:=complexNormalize ee
--R
--R (7) 0
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

24 [1]:14.422 $\int \frac{dx}{p \sin ax + q \cos ax \pm \sqrt{p^2 + q^2}}$

$$\int \frac{1}{p \sin ax + q \cos ax \pm \sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{-1}{a\sqrt{p^2 + q^2}} \tan\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax + \tan^{-1}(q/p)}{2}\right)$$

<*)+=

)clear all

--S 161

aa:=integrate(1/(p*sin(a*x)+q*cos(a*x)+sqrt(p^2+q^2)),x)

--R

--R

--R (1)

$$\frac{\begin{aligned} & ((64q^5 + 64p^2q^3 + 12p^4q)\cos(ax) + 64q^5 + 64p^2q^3 + 12p^4q)\sqrt{q^2 + p^2} \\ & + (-64q^6 - 96p^2q^4 - 36p^4q^2 - 2p^6)\cos(ax) - 64q^6 - 96p^2q^4 - 36p^4q^2 - 2p^6 \\ & / (64a^6q^6 + 80a^2p^4q^4 + 24a^4p^2q^2 + a^6p^6)\sin(ax) \\ & + (-32a^5p^3q^3 - 32a^5p^3q^3 - 6a^5p^3q^3)\cos(ax) - 32a^5p^3q^3 - 32a^5p^3q^3 - 6a^5p^3q^3 \\ & * \sqrt{q^2 + p^2} \\ & + (-64a^7q^7 - 112a^2p^5q^5 - 56a^4p^3q^3 - 7a^6p^6)\sin(ax) \\ & + (32a^6p^3q^4 + 48a^3p^4q^4 + 18a^5p^2q^7 + a^7p^7)\cos(ax) + 32a^6p^3q^4 + 48a^3p^4q^4 \\ & + 18a^5p^2q^7 + a^7p^7 \end{aligned}}$$

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 162

bb:=-1/(a*sqrt(p^2+q^2))*tan(%pi/4-(a*x+atan(q/p))/2)

--R

--R q

```

--R          2atan(-) + 2a x - %pi
--R          p
--R          tan(-----)
--R          4
--R (2) -----
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          a\|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 163
cc:=aa-bb

```

```

--R (3)
--R          6      2 4      4 2      6
--R          (64q  + 80p q  + 24p q  + p )sin(a x)
--R          +
--R          5      3 3      5      5      3 3      5
--R          (- 32p q  - 32p q  - 6p q)cos(a x) - 32p q  - 32p q  - 6p q
--R          *
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          \|q  + p
--R          +
--R          7      2 5      4 3      6
--R          (- 64q  - 112p q  - 56p q  - 7p q)sin(a x)
--R          +
--R          6      3 4      5 2      7      6      3 4      5 2      7
--R          (32p q  + 48p q  + 18p q  + p )cos(a x) + 32p q  + 48p q  + 18p q  + p
--R          *
--R          q
--R          2atan(-) + 2a x - %pi
--R          p
--R          tan(-----)
--R          4
--R          +
--R          6      2 4      4 2      6      6      2 4      4 2      6
--R          ((64q  + 96p q  + 36p q  + 2p )cos(a x) + 64q  + 96p q  + 36p q  + 2p )
--R          *
--R          +-----+
--R          | 2  2
--R          \|q  + p
--R          +
--R          7      2 5      4 3      6      7      2 5      4 3
--R          (- 64q  - 128p q  - 76p q  - 12p q)cos(a x) - 64q  - 128p q  - 76p q

```



```

--R      +
--R      6
--R      - 12p q
--R      /
--R      7      2 5      4 3      6
--R      (64a q + 112a p q + 56a p q + 7a p q)sin(a x)
--R      +
--R      6      3 4      5 2      7      6
--R      (- 32a p q - 48a p q - 18a p q - a p )cos(a x) - 32a p q
--R      +
--R      3 4      5 2      7
--R      - 48a p q - 18a p q - a p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|q + p
--R      +
--R      8      2 6      4 4      6 2      8
--R      (- 64a q - 144a p q - 104a p q - 25a p q - a p )sin(a x)
--R      +
--R      7      3 5      5 3      7      7      3 5
--R      (32a p q + 64a p q + 38a p q + 6a p q)cos(a x) + 32a p q + 64a p q
--R      +
--R      5 3      7
--R      38a p q + 6a p q
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 164
dd:=normalize cc

```

```

--R      (4)
--R
--R      +-----+
--R      6      2 5      3 4      4 3      5 2      6      7 | 2 2
--R      (- 32p q - 16p q - 48p q - 20p q - 18p q - 5p q - p )\|q + p
--R      +
--R      7      2 6      3 5      4 4      5 3      6 2      7      8
--R      32p q + 16p q + 64p q + 28p q + 38p q + 13p q + 6p q + p
--R      /
--R      8      7      2 6      3 5      4 4      5 3
--R      64a q + 32a p q + 144a p q + 64a p q + 104a p q + 38a p q
--R      +
--R      6 2      7      8
--R      25a p q + 6a p q + a p
--R      *
--R      +-----+

```

```

--R      | 2  2
--R     \|q  + p
--R   +
--R      9      8      2 7      3 6      4 5      5 4
--R     - 64a q  - 32a p q  - 176a p q  - 80a p q  - 168a p q  - 66a p q
--R   +
--R      6 3      7 2      8      9
--R     - 63a p q  - 19a p q  - 7a p q  - a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 165
ee:=ratDenom dd
--R
--R      +-----+
--R      | 2  2      2  2
--R     - q\|q  + p  - q  - p
--R (5)  -----
--R           2      3
--R          a p q  + a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```
)clear all
```

```

--S 166
aa:=integrate(1/(p*sin(a*x)+q*cos(a*x)-sqrt(p^2+q^2)),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R      +-----+
--R      5      2 3      4      5      2 3      4      | 2  2
--R     ((64q  + 64p q  + 12p q)cos(a x) + 64q  + 64p q  + 12p q)\|q  + p
--R   +
--R      6      2 4      4 2      6      6      2 4      4 2      6
--R     (64q  + 96p q  + 36p q  + 2p )cos(a x) + 64q  + 96p q  + 36p q  + 2p
--R /
--R      6      2 4      4 2      6
--R     (64a q  + 80a p q  + 24a p q  + a p )sin(a x)
--R   +
--R      5      3 3      5      5      3 3      5
--R     (- 32a p q  - 32a p q  - 6a p q)cos(a x) - 32a p q  - 32a p q  - 6a p q
--R *
--R      +-----+
--R      | 2  2
--R     \|q  + p

```

```

--R      +
--R      7      2 5      4 3      6
--R      (64a q  + 112a p q  + 56a p q  + 7a p q)sin(a x)
--R      +
--R      6      3 4      5 2      7      6      3 4
--R      (- 32a p q  - 48a p q  - 18a p q  - a p )cos(a x) - 32a p q  - 48a p q
--R      +
--R      5 2      7
--R      - 18a p q  - a p
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

--S 167

bb:=-1/(a*sqrt(p^2+q^2))*tan(%pi/4+(a*x+atan(q/p))/2)

```

--R
--R      q
--R      2atan(-) + 2a x + %pi
--R      p
--R      tan(-----)
--R      4
--R      (2) - -----
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      a\|q  + p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 168

cc:=aa-bb

```

--R
--R      (3)
--R      6      2 4      4 2      6
--R      (64q  + 80p q  + 24p q  + p )sin(a x)
--R      +
--R      5      3 3      5      5      3 3      5
--R      (- 32p q  - 32p q  - 6p q)cos(a x) - 32p q  - 32p q  - 6p q
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q  + p
--R      +
--R      7      2 5      4 3      6
--R      (64q  + 112p q  + 56p q  + 7p q)sin(a x)
--R      +
--R      6      3 4      5 2      7      6      3 4      5 2
--R      (- 32p q  - 48p q  - 18p q  - p )cos(a x) - 32p q  - 48p q  - 18p q

```

```

--R      +
--R      7
--R      - p
--R      *
--R      q
--R      2atan(-) + 2a x + %pi
--R      p
--R      tan(-----)
--R      4
--R      +
--R      6      2 4      4 2      6      6      2 4      4 2      6
--R      ((64q + 96p q + 36p q + 2p )cos(a x) + 64q + 96p q + 36p q + 2p )
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q + p
--R      +
--R      7      2 5      4 3      6      7      2 5      4 3      6
--R      (64q + 128p q + 76p q + 12p q)cos(a x) + 64q + 128p q + 76p q + 12p q
--R      /
--R      7      2 5      4 3      6
--R      (64a q + 112a p q + 56a p q + 7a p q)sin(a x)
--R      +
--R      6      3 4      5 2      7      6
--R      (- 32a p q - 48a p q - 18a p q - a p )cos(a x) - 32a p q
--R      +
--R      3 4      5 2      7
--R      - 48a p q - 18a p q - a p
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      \|q + p
--R      +
--R      8      2 6      4 4      6 2      8
--R      (64a q + 144a p q + 104a p q + 25a p q + a p )sin(a x)
--R      +
--R      7      3 5      5 3      7      7      3 5
--R      (- 32a p q - 64a p q - 38a p q - 6a p q)cos(a x) - 32a p q - 64a p q
--R      +
--R      5 3      7
--R      - 38a p q - 6a p q
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 169
dd:=normalize cc

```

```

--R
--R (4)
--R
--R          +-----+
--R          6      2 5      3 4      4 3      5 2      6      7 | 2      2
--R      (- 32p q + 16p q - 48p q + 20p q - 18p q + 5p q - p )\|q + p
--R
--R      +
--R          7      2 6      3 5      4 4      5 3      6 2      7      8
--R      - 32p q + 16p q - 64p q + 28p q - 38p q + 13p q - 6p q + p
--R
--R      /
--R          8      7      2 6      3 5      4 4      5 3
--R      64a q - 32a p q + 144a p q - 64a p q + 104a p q - 38a p q
--R
--R      +
--R          6 2      7      8
--R      25a p q - 6a p q + a p
--R
--R      *
--R          +-----+
--R          | 2      2
--R          \|q + p
--R
--R      +
--R          9      8      2 7      3 6      4 5      5 4
--R      64a q - 32a p q + 176a p q - 80a p q + 168a p q - 66a p q
--R
--R      +
--R          6 3      7 2      8      9
--R      63a p q - 19a p q + 7a p q - a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 170      14:422 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=ratDenom dd

```

```

--R
--R          +-----+
--R          | 2      2      2      2
--R      q\|q + p - q - p
--R (5) -----
--R          2      3
--R          a p q + a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

25 [1]:14.423 $\int \frac{dx}{p^2 \sin^2 ax + q^2 \cos^2 ax}$

$$\int \frac{1}{p^2 \sin^2 ax + q^2 \cos^2 ax} = \frac{1}{apq} \tan^{-1} \left(\frac{p \tan ax}{q} \right)$$

(*)+=
)clear all

--S 171

aa:=integrate(1/(p^2*sin(a*x)^2+q^2*cos(a*x)^2),x)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

$$(1) \frac{-\operatorname{atan}\left(\frac{(q^2 - 2p^2)\cos(ax) - 2p^2\sin(ax)}{pq\cos(ax) + 2pq\cos(ax) + p^2}\right) + \operatorname{atan}\left(\frac{q\sin(ax)}{2p\cos(ax) + 2p}\right)}{apq}$$

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 172

bb:=1/(a*p*q)*atan((p*tan(a*x))/q)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

$$(2) \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{p \tan(ax)}{q}\right)}{apq}$$

Type: Expression Integer

--S 173

cc:=aa-bb

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

$$(3) \frac{-\operatorname{atan}\left(\frac{p \tan(ax)}{q}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{((q^2 - 2p^2)\cos(ax) - 2p^2)\sin(ax)}{pq\cos(ax) + 2pq\cos(ax) + p^2}\right) + \operatorname{atan}\left(\frac{q\sin(ax)}{2p\cos(ax) + 2p}\right)}{apq}$$

```

--R          2p cos(a x) + 2p
--R  /
--R    a p q
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 174      14:423 Schaums and Axiom agree
dd:=normalize cc
--R
--R  (4)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

26 [1]:14.424 $\int \frac{dx}{p^2 \sin^2 ax - q^2 \cos^2 ax}$

$$\int \frac{1}{p^2 \sin^2 ax - q^2 \cos^2 ax} = \frac{1}{2apq} \ln \left(\frac{p \tan ax - q}{p \tan ax + q} \right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 175
aa:=integrate(1/(p^2*sin(a*x)^2-q^2*cos(a*x)^2),x)
--R
--R
--R          2p sin(a x) - 2q cos(a x)          - 2p sin(a x) - 2q cos(a x)
--R      log(-----) - log(-----)
--R          cos(a x) + 1                      cos(a x) + 1
--R (1) -----
--R                                          2a p q
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 176
bb:=1/(2*a*p*q)*log((p*tan(a*x)-q)/(p*tan(a*x)+q))
--R
--R          p tan(a x) - q
--R      log(-----)
--R          p tan(a x) + q
--R (2) -----
--R          2a p q
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 177
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          2p sin(a x) - 2q cos(a x)          p tan(a x) - q
--R      log(-----) - log(-----)
--R          cos(a x) + 1                      p tan(a x) + q
--R +
--R          - 2p sin(a x) - 2q cos(a x)
--R      - log(-----)
--R          cos(a x) + 1
--R /
--R      2a p q
--R
--R                                          Type: Expression Integer

```



```

--E
--S 178
tanrule:=rule(tan(a) == sin(a)/cos(a))
--R
--R          sin(a)
--R (4) tan(a) == -----
--R          cos(a)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 179
dd:=tanrule cc
--R
--R (5)
--R          2p sin(a x) - 2q cos(a x)          p sin(a x) - q cos(a x)
--R log(-----) - log(-----)
--R          cos(a x) + 1                      p sin(a x) + q cos(a x)
--R +
--R          - 2p sin(a x) - 2q cos(a x)
--R - log(-----)
--R          cos(a x) + 1
--R /
--R 2a p q
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 180
ee:=expandLog dd
--R
--R          log(p sin(a x) + q cos(a x)) - log(- p sin(a x) - q cos(a x))
--R (6) -----
--R                                     2a p q
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 181 14:424 Schaums and Axiom differ by a constant
ff:=complexNormalize ee
--R
--R          log(- 1)
--R (7) -----
--R          2a p q
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

27 [1]:14.425 $\int \sin^m ax \cos^n ax \, dx$

$$\int \sin^m ax \cos^n ax = \begin{cases} -\frac{\sin^{m-1} ax \cos^{n+1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} ax \cos^n ax \\ \frac{\sin^{m+1} ax \cos^{n-1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m ax \cos^{n-2} ax \end{cases}$$

$\langle * \rangle + \equiv$

)clear all

--S 182 14:425 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(sin(a*x)^m*cos(a*x)^n,x)

--R

--R

--R

--R (1) $\int \cos^x(a) \sin^m(a) \, d\%H$

--R

--R

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

28 [1]:14.426 $\int \frac{\sin^m ax}{\cos^n ax} dx$

$$\int \frac{\sin^m ax}{\cos^n ax} = \begin{cases} \frac{\sin^{m-1} ax}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\sin^{m-2} ax}{\cos^{n-2} ax} \\ \frac{\sin^{m+1} ax}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\sin^m ax}{\cos^{n-2} ax} \\ \frac{-\sin^{m-1} ax}{a(m-n) \cos^{n-1} ax} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\sin^{m-2} ax}{\cos^n ax} \end{cases}$$

`<*>+≡
)clear all`

`--S 183 14:426 Axiom cannot compute this integral`

`aa:=integrate(sin(a*x)^m/cos(a*x)^n,x)`

`--R`

`--R`

`--R x m`

`--I ++ sin(%H a)`

`--I (1) | ----- d%H`

`--R ++ n`

`--I cos(%H a)`

`--R`

`Type: Union(Expression Integer,...)`

`--E`

29 [1]:14.427 $\int \frac{\cos^m ax}{\sin^n ax} dx$

$$\int \frac{\cos^m ax}{\sin^n ax} = \begin{cases} \frac{-\cos^{m-1} ax}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\cos^{m-2} ax}{\sin^{n-2} ax} \\ \frac{-\cos^{m+1} ax}{a(n-1)\sin^{n-1} ax} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\cos^m ax}{\sin^{n-2} ax} \\ \frac{\cos^{m-1} ax}{a(m-n)\sin^{n-1} ax} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\cos^{m-2} ax}{\sin^n ax} \end{cases}$$

<*)+=
)clear all

--S 184 14:427 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(cos(a*x)^m/sin(a*x)^n,x)

--R

--R

```
--R          x          m
--I      ++ cos(%H a)
--I (1) | ----- d%H
--R      ++          n
--I      sin(%H a)
```

Type: Union(Expression Integer,...)

--R

--E

30 [1]:14.428

$$\int \frac{dx}{\sin^m ax \cos^n ax}$$

$$\int \frac{1}{\sin^m ax \cos^n ax} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a(n-1) \sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{1}{\sin^m ax \cos^{n-2} ax} \\ \frac{-1}{a(m-1) \sin^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{1}{\sin^{m-2} ax \cos^n ax} \end{array} \right.$$

<*)+≡

)clear all

--S 185 14:428 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(1/(sin(a*x)^m*cos(a*x)^n),x)

--R

--R

--R

--R

--R (1) | $\frac{x}{\cos(\%H a) \sin(\%H a)^n} \frac{1}{\sin(\%H a)^m} d\%H$

--R

--I

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

)spool

)lisp (bye)

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp78-80